ÜBER DIE
ERMITTLUNG DER STERBLICHKEIT
AUS DEN AUFZEICHNUNGEN DER BEVÖLKERUNGS-STATISTIK

VON

DR. G. F. KNAPP

VORSTAND DES STATISTISCHEN BUREAUS DER STADT LEIPZIG

MIT VIER LITHOGRAPHIRTEN TAFELN



LEIPZIG
J. C. HINRICHS'SCHE BUCHHANDLUNG
1868.

DEM

STATISTISCHEN CONGRESS

IN

FLORENZ

GEWIDMET.

Inhaltsverzeichniss.

Zweiter Abschnitt.

Anwendung der Sätze zur sogenannten indirecten Ermittlung der Absterbeordnung und auf andere Fragen der Sterblichkeitslehre.

ERMITTLUNG DER STERBLICHKEIT.

Druckfehler.

Seite 14, Zeile 18 von oben lies das anstatt dass.
" 22, " 22 " " " Jahren anstatt Jahre.
" 27, " 15 " " " die Veränderliche anstatt das Veränderliche.
" 37, " 4 " unten " späteren anstatt spätesten.

Einleitung.

Die Frage nach der menschlichen Sterblichkeit wird fortwährend von der Bevölkerungsstatistik behandelt; aber die Behandlung ist noch nicht frei von Unklarheit, wie sich schon an den vielen Streitfragen, Vorschlägen und Gegenvorschlägen erkennen lässt. Es ist nicht anzunehmen, dass die Unklarheit in der Natur des behandelten Gegenstandes begründet sei — wohin würde man durch eine solche Annahme geführt! —; vielmehr muss es in der Art der Behandlung des Gegenstandes liegen, wenn bisher eine völlige Klärung noch nicht erreicht ist: vielleicht in der Fragestellung; vielleicht in dem Mangel an Hilfsmitteln, um die gestellte Frage zur Lösung zu bringen.

Gestärkt durch das Vertrauen, dass sich eine klärende Fragestellung finden und durchführen lässt, nähern wir uns dem Gebiete der Bevölkerungsstatistik, worin die menschliche Sterblichkeit behandelt wird, um nicht ohne Schüchternheit den mannigfaltigen Bestrebungen eine neue hinzuzufügen. Nicht ohne Schüchternheit — denn es dürften schwerlich Streit und Zweifel in andern Zweigen des menschlichen Wissens sich so fest als hier, so beinah unerreichbar, wie es scheint, eingenistet haben; sodass man fürchten muss, gleichfalls hie und da zu straucheln, wo so viele andere gefallen sind.

Indessen wagt der Verfasser einen Versuch gerade deshalb, weil ihn seine Beschäftigung näher mit dem Material der Bevölkerungsstatistik in Berührung gebracht hat, als viele andere Schriftsteller dieses Gebietes von sich sagen können; er getraut sich daher, die Bedürfnisse richtig zu erkennen und die zwecklose Speculation zu vermeiden, die so häufig anstatt einer Theorie geboten wird.

Die Unsicherheit der Untersuchungen auf diesem Gebiet ist so bekannt, dass sie kaum geschildert zu werden braucht; man blättere nur die Lehrbücher der Bevölkerungsstatistik durch, und die einzelnen Abhandlungen, die in Zeitschriften erscheinen, so gewinnt man einen hinreichenden Einblick. Auf der andern Seite muss man sich über einen solchen Zustand wundern, denn wenn irgendwo ausserhalb der Wissenschaften, welche die Körperwelt behandeln, (wie Chemie oder Physik), so scheint gerade hier eine schlechterdings exacte

Behandlung möglich zu sein. Schon das Wort Statistik in seiner gebräuchlichsten Verwendung zeigt an, dass Beobachtungen von Thatsachen die Grundlage bilden; und es ist bekannt, dass die Thatsachen des Sterbens und Geborenwerdens von Jahr zu Jahr mit grösserer Sorgfalt aufgezeichnet und in grösserer Ausdehnung zugänglich gemacht werden. Wie kommt es, dass gleichwohl die Lehre von der Sterblichkeit, soweit sie sich auf Material der Bevölkerungsstatistik gründet, nicht einen einzigen von allen den vielen Vorzügen aufweist, die man bei den sogenannten exacten Wissenschaften bewundert? Anstatt dass der Wortstreit längst ausgerottet wäre, wuchert er vielmehr mit ungeschwächten Kräften weiter und dehnt sich aus nach allen Seiten. Wo man massvolle Verkündung der Resultate erwartet, die sich als Vorläufer einer genaueren Erkenntniss ausgeben, hört man rechthaberisches Pochen auf das wenige gefundene, Vertheidigung sogar der richtigen Ansichten durch halbwahre Gründe. Keine planvolle Ermittlung der thatsächlichen Verhältnisse, kein selbstbewusstes Hinstreben nach wohlerkanntem Ziele; vielmehr zufällig entstandene Tabellen aufs willkürlichste ausgebeutet. Wie der Reiter, wenn er die Zügel verloren hat, seinem Ross, so folgt häufig der Schriftsteller willenlos seinem Rechenstifte, und ein Gebiet, worauf der menschliche Geist seine Herrschaft, wie überall, befestigen sollte — wie oft sieht es den menschlichen Geist der rohsten Empirie unterliegen.

Die Erklärung liegt nicht weit; es ist nicht nur undenkbar, dass der klägliche Zustand mit dem Wesen der Sache eng und untrennbar verbunden wäre; es ist auch nicht einmal nöthig, eine so verzweifelte Anschauung zu hegen, denn es liegen ganz andere Erklärungen offen.

Ist es doch bekanntlich nicht hinreichend, dass überhaupt thatsächliches Material den Untersuchungen zu Grunde liege, um ihnen die Eigenschaft der Exactheit zu verleihen; wäre dieser Umstand an sich schon genügend, dann wären die meisten Arbeiten über Sterblichkeit schon exact, und man müsste allerdings die Unsicherheit, wo sie herrscht, dem Stoffe selbst zuschreiben. Aber zum Glück ist es nicht die Verwendung der da und dort wirklich und verlässig gemachten Aufzeichnungen, was den Arbeiten ihre Verlässigkeit giebt — wenn auch solche Aufzeichnungen den unentbehrlichen Zubehör bilden. Nicht die beliebige Verwendung, sondern allein die Verwendung des Stoffes im Dienst einer einfach und zweckmässig gestellten Frage gibt den Arbeiten dieses und jedes andern Gebietes ihre Verlässigkeit. Man muss wissen, was man will. Das Bild dessen, was man sucht, muss einem vor Augen schweben; dem bestimmten Zweck muss das Material dienstbar gemacht werden. Dazu gehört unbedingt die Kenntniss, wie ein gegebenes Material zu einem gegebenen Zweck ausgebeutet werden kann — wir wollen diese Kenntniss die Theorie nennen — und es lässt sich keck behaupten, dass die Sterblichkeitslehre der Bevölkerungsstatistik nur deshalb so unentwickelt ist, weil ihr — bei gegebenem Ziel und bei gegebenem Material — die Brücke zwischen beiden, die Theorie fehlt. —

Suchen wir uns diesen Zustand etwas deutlicher vorzustellen und ihn geschichtlich zu erklären.

Die Aufgabe jeder Untersuchung über menschliche Sterblichkeit ist bekanntlich in festester Fassung längst niedergelegt: es gilt durch wissenschaftliche Verarbeitung des geeigneten Materials nachzuweisen, wie sich eine Anzahl von geborenen Individuen irgend welcher Art (z. B. männlicher oder weiblicher Individuen) bei fortschreitendem Alter durch Absterben der Einzelnen nach und nach vermindert; es handelt sich, wie man es ausdrückt, darum, die Absterbeordnung einer Anzahl von Geborenen zu finden. An dieser Aufgabe halten wir fest; sie bildet das Ziel, von dem wir oben sprachen.

Andrerseits ist es bekannt, wie das Material der Bevölkerungsstatistik entsteht: wo eine Bevölkerung zu civilisirten Staaten vereinigt lebt, da wird jeder vorkommende Sterbefall mit vielen näheren Umständen, und ebenso jede vorkommende Geburt aufgezeichnet in Registern, die theils von besonderen Behörden, theils von den kirchlichen Behörden geführt werden. Ebenso wird fast überall in grössern oder kleinern Zwischenräumen der Bestand der Bevölkerung an einem bestimmten Zeitpunkt durch sogenannte Volkszählung ermittelt und in Listen aufgezeichnet. Der Inhalt dieser Listen und Register bildet das Material der Bevölkerungsstatistik, dessen Ausbeutung zu dem Zwecke, die Sterblichkeit (genauer die Absterbeordnung) zu finden, so nahe liegt.

Es fehlt nun an gelegentlichen Versuchen und an Rathschlägen keineswegs, wie man die Ausbeutung vorzunehmen habe — und wir werden darauf zurückkommen; aber es fehlt ganz und gar eine hinreichend allgemein gehaltene Theorie, durch welche allein die gelegentlichen Versuche und Rathschläge wissenschaftlich begründet werden können und in deren Ermangelung nichts Ganzes, sondern nur Stückwerk erscheint.

Geschichtlich erklärt sich das Fehlen einer Theorie, wie mir scheint, in folgender Weise: Die erste wissenschaftliche Behandlung der Sterblichkeitslehre verwarf mit Recht die vorgefundenen Versuche, das Material der Bevölkerungsstatistik auszubeuten; aber sie verschmähte es, an die leer gewordene Stelle etwas haltbares einzusetzen.

Dieser erste Kritiker, den wir meinen, war Moser, der das bekannte Buch schrieb: die math. Gesetze der menschlichen Lebensdauer 1839, das bis auf den heutigen Tag typisch geblieben ist. Moser fand damals als Methoden, die Sterblichkeit nach dem Alter zu erforschen, vor allem die sogenannte Halley'sche und Eulerische vor; beide sind erdacht, um die Aufzeichnungen über die Verstorbenen zu verwerthen, sie sind also wesentlich Ausbeutungen eines Theils des Materials der Bevölkerungsstatistik. Aber beide Methoden waren zugleich gegründet auf so völlig unerfüllbare Voraussetzungen über das Wachsen der Bevölkerung, dass Moser sie mit Recht als gänzlich unbrauchbar verwarf. Nicht auf dieses oder jenes Wachsthum der Bevölkerung — so fordert Moser — seien die Methoden zu gründen, sondern solche Methoden seien allein

brauchbar, die für jeden Zustand der Bevölkerung anwendbar sind; um sich diesem Ziele zu nähern, empfehle sich vor allem das Material der Versicherungsgesellschaften, im Gegensatz zum Material der Bevölkerungsstatistik. In der That wendet sich im Laufe seines Werkes Moser ganz allein dem Material der Versicherungsgesellschaften zu und kehrt nicht wieder zu dem der Bevölkerungsstatistik zurück.

Während nun im Laufe der Zeit das Material der Bevölkerungsstatistik immer mehr und immer besser wurde, verhielten sich gleichwohl Moser's Nachfolger (z. B. Fischer, Grundlagen des Versicherungswesens, 1860) wesentlich abweisend. Und die Bevölkerungsstatistik konnte doch gar nicht umhin, die Fragen der Sterblichkeit zu berühren! Immer weiter wurde die Theorie für das Material der Versicherungsanstalten ausgebildet, und immer verlassener stand das verwandte Gebiet der Bevölkerungsstatistik, sodass es rathlos in die oben angedeutete, von andern noch weit schärfer gezeichnete Verwilderung gerieth.

Wenn man jetzt z. B. das Buch von Fischer mit den Werken über Bevölkerungsstatistik vergleicht, so scheint es, als hätte die letzere ein wohlerworbenes Recht, die Fragen der Sterblichkeit in möglichst unvollkommener Weise weiter zu behandeln, unbekümmert um die Fortschritte, die man anderswo gemacht hat. Das Problem der Absterbeordnung, das langentbehrte aber längst gefundene Ziel, zu dessen Erreichung sich alle vereinigen sollten, tritt in der Bevölkerungsstatistik in den Hintergrund, verdrängt durch die Frage nach dem Verhältniss der Verstorbenen eines Zeitraums zu der Volkszahl; oder verdrängt durch die Berechnung dieses oder jenes Durchschnittsalters, dessen Zusammenhang mit ähnlichen, aus der Absterbeordnung abgeleiteten Begriffen nicht einmal gezeigt werden kann, weil die Methoden der Darstellung fehlen. Und alle diese Bemühungen, redlich wie sie sind, entbehren gänzlich jeder wissenschaftlichen Färbung. Im Gefühl der allgemeinen Verwirrung greift man zu unerhörten Mitteln. Man schlägt z. B. dem Leser vor, er möge dieses oder jenes durchschnittliche Alter „einstweilen“ als das Mass der mittleren Lebensdauer, berechnet aus der nicht bekannten Absterbeordnung, ansehen, man möge diesen oder jenen Quotienten als das Mass für das und jenes betrachten. Solche Vorschläge sind unerhört in andern Disciplinen. Schliesst man, wie bei verwickelten Rechtsfällen, mit dem Leser einen Vergleich? Wendet man sich an seine Gutmüthigkeit um ein Zugeständniss, das ihm vielmehr durch den Zwang der Beweisführung muss abgerungen werden? Darf man das Gebiet der Erkenntniss mit dem des Willens verwechseln?

Est ist anerkannt, auch von den Vertretern der Statistik, wie z. B. von Engel, dass hier Abhilfe geschafft werden muss. Sie scheint nur möglich, wenn es gelingt, eine theoretische Behandlung aufzufinden, denn das Uebel scheint uns aus dem Mangel einer solchen entstanden. Es muss das öffentliche Vertrauen, das dieser Disciplin als einer beobachtenden so gern entgegentritt, ge-

rechtfertigt werden; es muss dafür gesorgt werden, dass die Arbeiten dieser Art nicht Vorurtheile und Irrthümer verbreiten, sondern wirkliche Aufklärung über die Fragen der Sterblichkeit.

Es ist die Aufgabe dieser Abhandlung, einen Theil der versäumten Theorie nachzuholen; auf welchem Weg und in welcher Ausdehnung, das wird sich leichter sagen lassen, sobald über das Wesen des bevölkerungsstatistischen Materials einiges nähere gesagt ist. —

Von den Registern der Gebornen und Gestorbenen, sowie von den Listen der Volkszählungen haben wir schon bemerkt, dass sie die Grundlage dieses Theiles der Bevölkerungsstatistik bilden. Aber diese reichen, fast unerschöpflichen Fundgruben von Material sind nicht auf einmal zugänglich. Denn die Register liegen in den Pfarrämtern oder sonstigen Verwaltungsbehörden, also in tausend Orten jedes Landes zerstreut, die Zählungslisten ebenfalls. Und während die ersteren, als Urkunden von grosser Bedeutung für das bürgerliche Leben, an jedem Orte in gewichtigen Bänden sorgfältig aufbewahrt werden, dauern die Zählungslisten gewöhnlich nur von einer Zählung zur andern wegen ihrer raumverzehrenden Masse. Die Zerstreutheit also und der Umfang des Materials verbieten einerseits die handschriftliche Benutzung, andrerseits die Veröffentlichung durch den Druck.

Es ist daher längst ein Mittel im Gebrauch, um das Material dennoch, wenn auch in andrer Form, zur öffentlichen Kenntniss der Gegenwart und der spätern Zeiten zu bringen: man lässt Auszüge herstellen und veröffentlichen. Die Arbeit des Ausziehens leitet an oder besorgt meistens eine Behörde, die den Namen eines statistischen Bureaus zu führen pflegt, und die von ihr herausgegebenen Tabellenwerke, worin die Auszüge, von denen wir reden, sich befinden, stehen in fast allen öffentlichen Bibliotheken gesammelt. Solche Auszüge bilden gewöhnlich die Unterlage der statistischen Untersuchungen; sogar dann, wenn man das ungedruckte Material zur Verfügung hat, denn es muss dann doch ausgezogen werden.

Eine Theorie der Bevölkerungsstatistik, wie wir sie suchen, wird sich also mit der Bedeutung jener Auszüge zu beschäftigen haben. Wir gehen daher noch näher darauf ein.

Ein Auszug wird immer dadurch hervorgebracht, dass man gewisse Merkmale, Eigenschaften, Umstände, Gesichtspunkte auswählt und aus der grossen Masse der einzelnen Fälle diejenigen Fälle sammelt, denen das gewählte Merkmal u. s. w. gemeinsam ist. Man kann also das Verfahren des Ausziehens auch so beschreiben: durch Angabe von Merkmalen bestimmt man gewisse Gesammtheiten von Individuen unter der Masse der gegebenen, und weist dann nach, durch Auszählen aus den Registern u. s. w., wie gross die bestimmte Gesammtheit ist. Das Ausziehen ist also eine zwiefache Thätigkeit; zuerst wird gefragt was? das nannten wir „eine Gesammtheit bestimmen;“ und dann wie gross? dass nennen wir „die Grösse der Gesammtheit nachweisen“. Das erstere geschieht

durch den, der die Tabellenköpfe entwirft; das letzere durch den, der die Tabellen ausfüllt.

Der Ausdruck „Gesammtheit“ ist neu, aber gewiss verständlich, und wie wir sehen werden, von grossem Nutzen. —

Die Erwägung, einer wie mannigfaltigen Betrachtungsweise der Mensch unterworfen werden kann, gibt uns zu erkennen, dass man mit unbegrenzter Mannigfaltigkeit Gesammtheiten bilden und ihre Grösse aus den Registern und Listen nachweisen kann. Die geborenen oder verstorbenen oder vorhandenen Individuen kann man z. B. unterscheiden nach dem Geschlecht, nach dem religiösen Bekenntniss, nach ihren Beziehungen zur Ehe, und nach wer weiss wie vielen andern qualitativen Rücksichten.

Doch sind es die erwähnten qualitativen Rücksichten nicht, mit denen wir uns zu beschäftigen haben; sie sind uns nebensächlich, wir setzen sie als gegeben oder nicht gegeben voraus, und finden unsere Aufgabe erst durch folgende Betrachtung.

Wenn man schlechtweg von Lebenden oder Gestorbenen redet, oder auch schlechtweg von so oder so beschaffenen Lebenden oder Gestorbenen, so sind diese Begriffe in qualitativer Hinsicht vielleicht deutlich genug; aber um die Grösse einer Gesammtheit von Individuen durch Auszählen nachweisen zu können, genügt es nicht, dass man die Beschaffenheit der Individuen kennt; es müssen vielmehr, damit die Gesammtheit nachweisbar bestimmt sei, noch die Umstände d e s O r t e s und d e r Z e i t gegeben sein. Man muss nicht nur wissen was, sondern auch wann und wo. Die Frage: wie viele sind gestorben? kann man nicht beantworten, es sei denn, dass man etwa hinzusetzt: in Preussen im Jahr 1864.

Verabreden wir uns, immer von den nämlichen räumlichen Gebiet zu sprechen, so genügt es zu sagen: die Gesammtheiten von lebenden oder gestorbenen Individuen sind ihrer Grösse nach erst dann nachweisbar, wenn gewisse Umstände zeitlich bestimmt sind. Ein solcher Umstand ist z. B. bei den Lebenden: das Vorhandensein; die Gesammtheit derer, die am 3. Decbr. 1864 auf dem Gebiete des Zollvereins vorhanden waren, kann man ihrer Grösse nach ermitteln. Bei den Gestorbenen ist z. B. das Sterben ein solcher Umstand.

E i n zeitlich bestimmter Umstand muss also für jede Gesammtheit gegeben sein, damit ihre Grösse nachweisbar sei; aber daneben können noch andere Umstände zeitlich bestimmt sein. Z. B. neben den soeben genannten Umständen kann immer noch gesagt sein, wann jene Lebenden oder Gestorbenen geboren waren; etwa: die Gesammtheit derjenigen Lebenden, die, geboren im Jahr 1807, am 3. Decbr. 1864 noch angetroffen wurden.

Durch den Vergleich andrer zeitlich bestimmbarer Umstände mit dem zeitlich bestimmbaren Umstand des Geborenseins entsteht in uns der Begriff des Alters. Das Alter ist eine messbare Eigenschaft, die neben allen andern Eigenschaften jedem Individuum zukommt; eine Eigenschaft, die also immer dazu

dienen kann, eine Gesammtheit von Lebenden oder Verstorbenen näher bestimmen zu helfen.

Nun setzen wir uns als Aufgabe: die Gesammtheiten von Lebenden und von Verstorbenen darzustellen, die durch Angaben über

Geburtszeit,
Zeit des Vorhandenseins, resp. des Sterbens;
und Alter

nachweisbar bestimmt sind; und zwar so darzustellen, dass man die Beziehungen einer jeden Gesammtheit zur Absterbeordnung daraus erkennt — denn es soll ja gezeigt werden, wie die Gesammtheiten, deren Grösse die Bevölkerungsstatistik nachweist, zur Erforschung der Sterblichkeit dienen können. Gleichzeitig finden wir so, wie sich die verschiedenen Gesammtheiten von einander unterscheiden; wir lernen die Eigenschaften kennen, die den Gesammtheiten zukommen, je nachdem man sie bestimmt hat: die begrifflichen Eigenschaften, wie wir sie nennen wollen. Eine solche Darstellung ist es, die wir vermissen, es ist die bis jetzt fehlende Theorie der Bevölkerungsstatistik in Bezug auf die Sterblichkeit.

Unter den so darzustellenden Gesammtheiten werden sich auch alle diejenigen befinden, deren Grösse gewöhnlich von der praktischen Statistik nachgewiesen wird. Z. B. die Gesammtheit derjenigen lebenden Individuen, die an einem gewissen Zeitpunkt in einer bestimmten Altersclasse stehen; oder die Gesammtheit derjenigen, welche während eines bestimmten Zeitraums innerhalb bestimmter Altersgrenzen verstorben sind. Von allen diesen und vielen andern Gesammtheiten soll also gezeigt werden, wie sie mit der Absterbeordnung zusammenhängen. —

Damit aber, was die Theorie findet, auch anwendbar sei, ist zu bedenken, dass die Gesammtheiten von Lebenden oder Verstorbenen, deren Grösse aus Registern und Listen wirklicher Staaten nachgewiesen werden, aus lauter nach und nach geborenen Individuen bestehen; denn auf einem bevölkerten Gebiete finden fortwährend Geburten statt, und nicht etwa nur an dieser oder jener Stelle des Jahrs. Es ist also darzustellen, welchen Zusammenhang die Gesammtheiten von Lebenden und Gestorbenen, die aus stätiger Geburtenfolge hervorgehen, und die durch Angaben der oben beschriebenen Art nachweisbar bestimmt sind, mit der Absterbeordnung haben.

Während also die praktische Statistik die Grösse einiger Gesammtheiten von Lebenden und Gestorbenen für ein gewisses Staatsgebiet ermittelt, durch Auszählung der Register oder der Listen, um Tabellen mit Zahlen anzufüllen — untersucht die theoretische Statistik ohne Rücksicht auf ein bestimmtes Staatsgebiet nichts anders als die begrifflichen Eigenschaften der verschiedenen Gesammtheiten, d. h. sie beschäftigt sich gleichsam mit dem Sinn der Tabellenköpfe mit Rücksicht darauf, ob sie für Untersuchungen über Sterblichkeit zweckmässig sind. Man sieht aus diesem Vergleich zur Genüge, dass eine

solche Theorie nicht in der Luft schwebend ist, sondern ein nothwendiges Erforderniss, wenn die Statistik überhaupt einem Zwecke dienen und nicht zur sinnlosen Verarbeitung sinnloser Notizen herabsinken soll. —

Gibt es aber auch ein Mittel, wodurch wir jede Gesammtheit in ihrem Zusammenhang mit der Absterbeordnung darstellen können? Zunächst liegt es, den Zusammenhang durch die gewöhnliche Rede, durch die man auch andere Gedanken äussert, gleichsam zu schildern; und es unterliegt keinem Zweifel, dass es möglich wäre, wenn man eine unermüdliche Geduld beim Leser voraussetzen könnte. Aber dieses Mittel ist ganz unsäglich weitläufig und darf um so mehr umgangen werden, als ein viel kürzeres und deutlicheres zur Hand ist.

Wenn man sich nämlich die Geburtenfolge als eine Function der Zeit, und die Absterbeordnung als eine Function des Alters denkt, so lassen sich alle Gesammtheiten von Lebenden und von Verstorbenen als verschiedenartige Verbindungen dieser beiden Urfunctionen darstellen. Es lässt sich auf diesem Weg erreichen, was wir suchen, und zwar in ganz allgemeiner Weise, sobald wir die beiden Urfunctionen mit keiner andern als denjenigen Eigenschaften ausstatten, die einer jeden Geburtenfolge und einer jeden Absterbeordnung ihrem Wesen nach eigenthümlich sind. Die hierdurch angedeutete Methode, deren wir uns zur Entwicklung der Theorie bedienen werden, bietet den grossen Vortheil, dass sie eine mathematische Methode ist. Das heist, sie erlaubt mit grosser Bequemlichkeit Schlüsse zu ziehen, die ebenso verlässig sind, als die Grundlagen, worauf sie beruhen. Anstatt also die ganze Entwicklung in Worten durchzuarbeiten, wird man erst die Resultate in Worte übersetzen; wodurch sowohl Mühe gespart, als auch Sicherheit und Deutlichkeit gewonnen wird.

Dieser allgemeinen analytischen, bis jetzt noch nicht versuchten Darstellung der verschiedenen Gesammtheiten, widmen wir den ersten Abschnitt dieser Abhandlung; zugleich wird darin die directe Ermittelung der Absterbeordnung behandelt, da sie sich ohne weiteres daraus ergiebt.

Der zweite Abschnitt wendet die gefundenen Sätze an zur indirecten Ermittelung der Absterbeordnung, und zwar, theils um ältere Methoden zu prüfen, theils um neue vorzuschlagen; woran sich eine Prüfung solcher Vorschläge leicht anreiht, welche durch verschiedene andere Quotienten die Sterblichkeit messen wollen.

Direct nennen wir diejenige Ermittelung, welche von der Geburtendichtigkeit unabhängig ist; indirect diejenige, welche auf die Geburtendichtigkeit Rücksicht nehmen muss — wovon später das genauere.

Am Ende des ersten und des zweiten Abschnittes soll auf die Literatur näher eingegangen werden.

Von dem Gebrauch, der seit Moser herrschend geworden ist, nämlich die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung jedesmal voranzuschicken, wo von der Sterblichkeit gehandelt wird, weichen wir aus guten Gründen ab. Nicht

etwa, weil sie als bekannt vorausgesetzt würden, sondern weil sie ganz und gar zu unserm Zwecke überflüssig und nutzlos sind. Fragen über Wahrscheinlichkeit zu sterben oder nicht zu sterben können nämlich an die Absterbeordnung angehängt werden, um die Aufgabe des Versicherungswesens zu erklären oder aus sonstigen Zwecken, aber hier handelt sichs nicht darum, eine gefundene oder gefunden gedachte Absterbeordnung anzuwenden, sondern darum, sie zu finden. Die Absterbeordnung an sich ist hier der Zweck der Untersuchung, mag man sie so oder so verwenden; im Gebiete der Bevölkerungsstatistik ist sie an sich wissenswerth. So sehr also die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeit in den Werken am Platze sind, die vom Versicherungswesen handeln, ebenso falsch wäre es, dieselben hier anzubringen.

Im nächsten Kapitel besprechen wir die allgemeinen Eigenschaften der Geburtenfolge und der Absterbeordnung, mit deren Hilfe die Gesammtheiten darzustellen sind, und theilen die Bezeichnungen mit, die wir nach Einführung der Functionsbegriffe dafür wählen und was sonst im Voraus zu bemerken ist.

ERSTER ABSCHNITT.

Die Gesammtheiten der Lebenden und Verstorbenen,

analytisch dargestellt.

Erstes Capitel.

Vorbereitung: Zeit und Alter. Geburtenfolge. Absterbeordnung. Voraussetzungen.

Einen Zeitpunkt bestimmt man näher durch die Angabe wie viele Zeiteinheiten bei seinem Eintritt verflossen waren. Nur auf diese Weise kann eine genaue Bestimmung stattfinden, denn es ist klar dass die bürgerliche Zeitbestimmung — durch Angabe in der wievielten Zeiteinheit etwas geschehen sei — einen Spielraum lässt, den man zwar im gewöhnlichen Leben, nicht aber für den uns vorschwebenden Zweck vernachlässigen kann. Die Wahl der Einheit und die Wahl desjenigen Punktes, von dem aus der Verfluss der Zeit gerechnet wird, hat man in seiner Willkür. Der Abwechslung wegen werden wir zuweilen von Jahren sprechen und dieselben von Christi Geburt ab zählen, ohne damit verhindern zu wollen, dass man anstatt dessen andre Zeiteinheiten und andre Anfangspunkte verstehe.

Die Zahl der verflossenen Zeiteinheiten bezeichnet man gewöhnlich durch t. Diesem Gebrauch schliessen wir uns an, jedoch mit der Unterscheidung, dass, wenn die Zeit einer Geburt bestimmt werden soll, immer das Zeichen t_0 gewählt wird; das Zeichen t bleibt also für die Zeitbestimmung andrer Ereignisse vorbehalten. Eine Unterscheidung, die sogleich bei der Definition des Alters wichtig wird.

Das Alter eines Individuums ist die Differenz zweier Zeiten; die eine davon — wir nennen sie die Erfüllungszeit t — ist willkürlich; die andere muss früher liegen und die Geburtszeit t_0 sein. Die Grösse des Alters wird also in denselben Einheiten ausgedrückt wie die Zeit; und wenn wir unter x die Grösse des Alters verstehen, so haben wir für das Alter die wichtige Gleichung:

$$x = t - t_0$$

Wenn von den drei Grössen: Alter, Erfüllungszeit und Geburtszeit, zwei gegeben sind, so folgt daraus die dritte.

Es steht in unsrer Willkür, eine von den drei Grössen (oder auch zwei derselben) als veränderlich zu betrachten, nur muss man bedenken, dass dann über die beiden andern (oder über die dritte) nicht mehr frei verfügt werden kann.

Die Bemerkung, dass aus zwei jener gegebenen Grössen die dritte folgt, und dass es also gleichgültig ist, welche zwei Grössen gegeben sind, führt uns dazu, die einfachsten Gesammtheiten von Lebenden und Verstorbenen zu bestimmen. Es wird nämlich einerlei sein ob ich eine Gesammtheit von Lebenden bestimme durch Angabe

des Zeitpunktes der Geburt
und ein zu erreichendes Alter;
oder durch Angabe desselben Alters
und der Erfüllungszeit;
oder durch Angabe der Geburtszeit
und der Erfüllungszeit.

Von diesen einfachsten Gesammtheiten der Lebenden werden wir aber sehen, dass sie bei stätiger Geburtenfolge unendlich klein, also nicht nachweisbar, und nur als die Grundlage wichtig sind, worauf die Darstellung der endlichen Gesammtheiten beruht. —

Nun ist das „nach und nach Geborenwerden" in einer solchen Weise vorzustellen, wie es die Methode, die in der Einleitung angedeutet ist, verlangt aber keineswegs vorfindet.

Man denke sich die Zahl aller Individuen, welche vom Anfangspunkt bis zur Zeit t_0 geboren sind, als eine Function der Zeit t_0; und bezeichne die Zahl dieser Gebornen allgemein durch $F(t_0)$. Es wird eine nothwendige Eigenschaft dieser Geburtenmenge $F(t_0)$ sein, dass sie bei fortschreitendem t_0 immer zunimmt; denn die Zahl aller gebornen Menschen kann sich im Laufe der Zeit nur vergrössern, niemals verkleinern — sonst müsste ja eine Geburt ungeschehen gemacht werden — und auch nicht wohl gleich bleiben, denn überall wo überhaupt bevölkerte Gebiete sind, finden neue Geburten statt.

Die Geburtenmenge erhält also, wenn die Zeit vorschreitet, einen Zuwachs; aber erhält sie diesen Zuwachs schon bei jedem auch noch so kleinen Vorschreiten der Zeit? Ist die Menge der geschehenen Geburten eine stätige Function der Zeit?

Offenbar ist sie keine stätige Function der Zeit, wenn man so genau als möglich den Vorgang auffasst. Denn wenn z. B. eine Bevölkerung nicht sehr gross wäre, so dass etwa jährlich nur gegen 3000 Geburten vorfallen — ungefähr 10 an jedem Tag — so kann man die Zeit um ganz beträchtliche Bruchtheile eines Tages fortschreiten lassen, ohne dass die Geburtenmenge nur um die Zahl eines einzigen Gebornen wüchse.

Nun könnte man sich freilich das bevölkerte Gebiet so gross denken, dass etwa täglich 10.000 oder 100.000 Geburten stattfänden; aber obgleich dadurch

die Geburten immer näher zeitlich aneinanderrücken, so verschwinden doch die leeren Zeiträume niemals ganz, d. h. die Geburtenmenge wird niemals in aller Strenge eine stätige Function der Zeit sein.

Das ist einzuräumen, damit man den Vorwurf des Verschweigens vermeide. Aber jedermann wird zugeben, dass es schon für Gebiete, auf denen täglich nur wenige Geburten stattfinden, eine sehr geringfügige Entstellung ist, wenn man, anstatt eine Geburt an je einem einzigen Zeitpunkt eintreten zu lassen, vielmehr das Hinzutreten je eines Gebornen so über eine kleine Zeitstrecke ausdehnt, dass in keinem Zeitpunkte der Zuwachs zur Geburtenmenge ganz aufhörte. Indem wir diese Vorstellung uns aneignen, dürfen wir die Geburtenmenge als eine stätige Function der Zeit betrachten, ohne dass der Natur der Sache ein wesentlicher Zwang auferlegt würde. —

Zugegeben, die Geburtenmenge sei eine stätige Function der Zeit, so wird der Zuwachs, den die Geburtenmenge zur Zeit t_0 erleidet, die Gebornen dieses Zeitpunktes bedeuten. Das Verhältniss zwischen dem Zuwachs zur Geburtenmenge und dem Zuwachs der Zeit t_0, d. h. den Differenzialquotienten $\frac{dF(t_0)}{dt_0}$ oder einfacher geschrieben $F'(t_0)$, nennen wir die Dichtigkeit der Geburtenfolge zur Zeit t_0. Die Geburtendichtigkeit ist immer positiv, d. h. $F'(t_0) > 0$, denn der Zuwachs zur Geburtenmenge ist immer positiv. Die im Augenblick t_0 Gebornen müssen dargestellt werden durch $dF(t_0) = F'(t_0)dt_0$; sie sind eine unendlich kleine Grösse. Die Zahl derer, die von der Zeit t_0' bis zur spätern Zeit t_0'' geboren werden, erscheint als $F(t_0'') - F(t_0')$; es versteht sich von selbst, dass die Zahl der Gebornen nur dann positiv erscheint, wenn sie vom frühesten bis zum spätesten aufgezählt sind.

Die Gebornen des Kalenderjahrs 1866 erscheinen also nach dieser Darstellung in der Form $F(1866) - F(1865)$, denn am Anfang jenes Zeitabschnittes waren 1865 ganze Jahre, am Ende des Kalenderjahrs waren 1866 ganze Jahre seit Christi Geburt verflossen.

Um uns kürzer auszudrücken werden wir zuweilen die Anzahl der von t_0' bis t_0'' Geborenen „die Generation" dieser Zeitstrecke nennen, und also unter der Generation von 1866 die Gebornen dieses Kalenderjahrs verstehen.

Von Dichtigkeit spricht man gewöhnlich nur, wenn räumliche Verhältnisse, und nicht wie hier zeitliche, besprochen werden; aber die Analogie liegt hier nahe genug, um die Uebertragung zu rechtfertigen, die um so unschädlicher ist, als von räumlichen Verhältnissen in der ganzen Abhandlung niemals geredet wird.

Die Stätigkeit der Geburtenfolge gibt den wirklichen Vorgang viel treuer wieder, als es gewöhnlich durch die Vorstellung geschieht, als seien alle Geburten, die während eines Zeitabschnittes geschehen, in einem einzigen Punkte dieses Zeitabschnittes vereinigt. Keine einzige willkürliche Vorstellung hat sich so fest eingewurzelt bei fast allen Schriftstellern als diese, deren Falschheit so

leicht zu erkennen ist. Es ist wahr, dass durch eine so willkürliche Annahme vielfache Rechnungen erleichtert werden, und wenn auch die Resultate der Rechnungen dann ungenau sind, so wäre das Hilfsmittel doch, in Ermangelung eines bessern, erträglich. Aber nicht nur bei Berechnungen dient die Annahme als Hilfsmittel; sie ist vielmehr so allein herrschend, dass die Begriffe und die Worte: Geburtenfolge und Geburtendichtigkeit gar nicht in Gebrauch sind. Ueberall wird so speziell als möglich von der jährlichen Geburtenmenge gesprochen, von ihrem Wachsen oder Fallen, auch da wo das „jährlich" ganz gleichgiltig und nur die Dichtigkeit gemeint ist. Es wäre zu wünschen dass dieser ungeschickte Gebrauch verschwände.

Ueberhaupt findet man nirgends seltner als hier eine klare Vorstellung, und in Folge dessen gehen Verwechslungen vor, die schlechterdings unbegreiflich sind. Wir wählen folgendes Beispiel.

Es ist dem Leser erinnerlich, dass die Lehrbücher, sobald als die „jährliche Geburtenmenge" erwähnt ist, so schnell als möglich diese Geburtenmenge mit der Bevölkerung, d. h. mit der Volkszahl vergleichen; sie berechnen aus beiden Zahlen einen Quotienten und nennen ihn Geburtsziffer. Es gehört nicht hierher, wozu ein solcher Quotient dienen kann; nur das gehört hierher, dass dieser hergebrachte Quotient die ganze Vorstellungskraft mancher Schriftsteller ausfüllt und sie förmlich an jeder natürlichen einfachen Betrachtung und Ausdrucksweise verhindert. So z. B. will Wappaeus den ganz richtigen Gedanken ausdrücken (worauf wir später zurückkommen), dass die Geburtendichtigkeit und die Absterbeordnung bestimmend sind für die Vertheilung der Bevölkerung nach Altersklassen. Aber er ist weit entfernt das richtige zu sagen. Er ahnt, dass es auf ein Verhältniss der Gebornen zu irgend einer andern Grösse ankomme; diese andre Grösse ist die Zeit; anstatt sie zu nennen, drängt sich ihm sofort das Verhältniss der Gebornen zur Bevölkerung auf, denn dies Verhältniss ist ihm allein geläufig. Und so sagt er denn wirklich,*) die Geburtsziffer sei für die Altersclassen bestimmend. Anstatt den Schritt zur Geburtendichtigkeit zu thun, der vor ihm liegt, verwechselt er zwei so unähnliche Begriffe wie Zeit und Bevölkerung. Aus diesen und ähnlichen Nachlässigkeiten rührt die Stumpfheit und Verwaschenheit her, die so häufig den Leser quält, sobald er eine Arbeit über Bevölkerungsstatistik zur Hand nimmt.

Die Function $F(t_0)$ kann graphisch versinnlicht werden durch irgend eine Curve, deren Ordinaten für jede grössere Abscisse wachsen; z. B. durch die Curve NP in der Fig. 1., deren Ordinaten dann die Menge der bis zu einem gewissen Zeitpunkt stattgehabten Geburten bedeuten, während die Geburten, die zwischen zwei Zeitpunkten liegen, durch die Differenzen der entsprechenden Ordinaten versinnlicht sind. Die Länge der Abscissen bedeutet die Lage der Zeitpuncte. —

*) Bevölkerungs-Statistik II, 49.

Ausser der Geburtenfolge bedürfen wir noch einer entsprechenden allgemeinen Darstellung der Absterbeordnung, die sich übrigens längst eingebürgert hat.

Eine gegebene Anzahl von Gebornen liefert eine immer kleinere Zahl solcher Individuen, welche ein höheres Alter erreichen, weil durch Wegsterben fortwährend einzelne Individuen verloren gehen. Wegen dieses Zusammenhangs kann die Zahl derjenigen, welche von jenen Gebornen das Alter x erreichen, als eine Function von x angesehen werden. Wir wählen die ursprüngliche Zahl der Gebornen zur Einheit und drücken durch $f(x)$ die Zahl derjenigen aus, welche davon das Alter x erreichen. Die Function $f(x)$ nennen wir die Absterbeordnung, denn es ist einleuchtend, dass man durch dieselbe auch die Zahl der Sterbenden ausdrücken kann, und ob man vom Sterben oder vom Ueberleben den Namen ableitet, ist gleichgültig.

Als nothwendige Eigenschaften der Function $f(x)$ sind folgende zu bemerken.

Erstens wegen der gewählten Einheit, $f(0) = 1$; denn Geborenwerden ist gleichbedeutend mit der Erreichung des Alters 0.

Zweitens, ein gewisses Alter, dass wir ω nennen, ohne uns weiter um seine Grösse zu kümmern, wird von gar keinem der Gebornen mehr erreicht werden, weil es zu hoch ist; daraus folgt: $f(\omega) = 0$. Es ist zwar richtig, dass kein Alter bekannt ist, das unter allen Umständen dem menschlichen Leben eine Grenze setzt; dass vielmehr aus dieser Gesellschaft von Gebornen schon nach 100 Jahren, aus jener erst nach vielleicht 105 oder 110 Jahren kein Individuum mehr übrig ist. Aber es vereinfacht die Darstellung sehr und enthält nur eine unbedeutende Willkür, wenn man das Alter ω als eine feste Grösse betrachtet.

Drittens, jeder grössere Werth von x, eingeführt in $f(x)$, bringt einen kleineren Werth der Function $f(x)$ hervor. Also der höchste Werth von $f(x)$ ist 1, der kleinste ist 0; während x alle Werthe von 0 bis ω durchläuft, durchläuft $f(x)$ alle Werthe von 1 bis 0.

Man kann, mit einer geringfügigen Entstellung der Wirklichkeit, den Vorgang des Absterbens als einen stätigen betrachten, ähnlich wie es bei der Geburtenfolge geschah; und in Folge dessen die Function $f(x)$ als eine stätige ansehen. Dies zugegeben kann man die dritte Grundeigenschaft auch dadurch ausdrücken, dass man schreibt $\frac{df(x)}{dx}$ oder $f'(x) < 0$. Es bedeutet nun $f'(x)dx$ den Zuwachs zu den $x$jährigen, wenn x um dx wächst: einen Zuwachs, der nach der Natur der Sache negativ ist.

Der negative Zuwachs entsteht dadurch, dass ein Theil der $x$jährigen bei fortschreitendem Alter stirbt. Die Zahl der Sterbenden, positiv genommen, wird also erscheinen, wenn man dem Zuwachs zu den $x$jährigen, der an sich negativ ist, das negative Zeichen hinzufügt. Also die Zahl der im Alter x

Sterbenden (aus einer Einheit von Gebornen) muss ausgedrückt werden durch $-f'(x)dx$.

Die Anzahl derer, die vom Alter x' bis x'', d. h. vom kleinern bis zum grössern Alter aufgezählt, sterben, erscheint also durch Integration von $-f'(x)dx$ zwischen der untern Grenze x' und der obern Grenze x'', das heisst die genannte Anzahl ist gleich $f(x') - f(x'')$.

Um jede Verwirrung der Vorzeichen zu vermeiden, halten wir daran fest, die Zahl der Verstorbenen immer in dieser Weise abzuleiten, nämlich durch Beifügung des negativen Vorzeichens an den Zuwachs der $x$jährigen; und werden über die Richtung der Integration jedesmal Rechenschaft ablegen, so oft ein neuer Fall auftritt.

Die Grössen $f(x)$ und $f(x') - f(x'')$, d. h. die aus einer Einheit von Gebornen das Alter x erreichen und die zwischen dem Alter x' und x'' sterben, sind es, auf die besonders unser Augenmerk gerichtet sein wird, wenn wir in den folgenden Kapiteln die Eigenschaften der verschiedenen Gesammtheiten von Lebenden und Gestorbenen untersuchen. Denn ob die eine oder andere Gesammtheit zur Erforschung der Absterbeordnung brauchbar ist, richtet sich danach, ob aus der betreffenden Gesammtheit der Werth $f(x)$ oder $f(x') - f(x'')$ gefunden werden kann. Um diese Frage zu entscheiden, stellen wir eben die verschiedenen Gesammtheiten durch die beiden Functionen $F(t_0)$ und $f(x)$ dar.

Die directe Ermittlung der Absterbeordnung kann nun näher bestimmt werden, nämlich als Aufsuchung der Grössen $f(x)$ und $f(x') - f(x'')$ ohne dass über die Geburtendichtigkeit $F'(t_0)$ etwas ausgesagt werden müsste. Die indirecte Ermittlung — im zweiten Abschnitt — sucht dieselben Grössen auf, aus den verschiedenen Gesammtheiten, aber durch solche Methoden, welche auf die Geburtendichtigkeit Rücksicht nehmen.

Ehe wir näher darauf eingehen, sei noch bemerkt, dass in dem vorausgehenden die Absterbeordnung weiter und richtiger aufgefasst ist, als es häufig geschieht. Viele nämlich sagen, sie habe den Zweck zu zeigen, wieviele von einer Einheit gleichzeitig Geborener nach einer Zeit von x Jahren noch vorhanden sind. Wir hingegen haben von gleichzeitig Geborenen nicht gesprochen, sondern nur von Gebornen; und auch nicht vom Vorhandensein nach einer gewissen Zeit, sondern von der Erfüllung eines gewissen Alters.

Die Definition der Absterbeordnung, die an gleichzeitig Geborne anknüpft, ist nicht gerade falsch; denn in der That ist es für gleichzeitig Geborne einerlei, ob man ihre Verminderung nach fortschreitender Zeit oder nach fortschreitendem Alter verfolgt. Jedoch die Auffassung ist viel zu speziell, um richtig zu sein, und hat vielfach zu Verwechslungen geführt. Das gleichzeitige Geborensein ist nämlich ganz unwesentlich, wenn man nur versteht, die Gebornen nach dem Alter zu verfolgen; wäre das gleichzeitige Geborensein ein wesentlicher Umstand, so könnte auf einem bevölkerten Gebiet von Absterbe-

ordnung gar keine Rede sein, denn niemals ist eine endliche Anzahl von Menschen, die man doch beobachten müsste, gleichzeitig geboren.

Die spezielle Auffassung anstatt der allgemeinen hat sich nur eingeschlichen im Gefolge der schon erwähnten sachwidrigen Annahme, dass auf einem bevölkerten Gebiet die Geburten auf einzelne Zeitpunkte vereinigt seien. Sie ist mit jener sachwidrigen Annahme zu verwerfen und die allgemeinere Auffassung wieder in ihr Recht einzusetzen.

Als graphische Darstellung der Function $f(x)$ kann, so lange man nur die allgemeinsten Eigenschaften betrachtet, irgend eine Curve dienen, deren Ordinaten für grössere Abscissen immer kleiner werden; die bei $x = \omega$ die Abscissenaxe schneidet und deren Ordinate bei $x = 0$ als Einheit genommen wird. In der Figur 1. kann die Linie AB als Abscissenaxe für das Alter x und die Linie PB als die Absterbecurve gelten. —

Die beiden Hilfsmittel, Geburtenfolge und Absterbeordnung, müssen hinreichend sein, wenn es gilt, die Gesammtheiten von Lebenden und Verstorbenen eines solchen bevölkerten Gebietes darzustellen, worauf keine anderen Zugänge von Individuen als durch Geburt, keine anderen Abgänge als durch Tod vorkommen. Die Erde als Ganzes genommen ist ein solches Gebiet. In die Gemeinschaft der Erdbewohner tritt man nur durch Geburt und nur durch den Tod verlässt man sie. Jedenfalls eignen sich also unsre Hilfsmittel zur Auffindung von Sätzen, die für das Gebiet der ganzen Erde gelten.

Auf den einzelnen Theilen der Erdoberfläche, wie die Gebiete sind, worauf unsre staatlichen Einrichtungen stehen, finden auch andre Zu- und Abgänge von Menschen statt als durch Geburt und Tod; nämlich durch W a n d e r u n g; über die Grenzen aller Staaten wandern fortwährend Menschen hin und her, sei es um dauernd oder vorübergehend den Aufenthalt zu wechseln. Es wird also zur Erklärung der Vorgänge auf einem wirklichen Staatsgebiet nicht ausreichen, dass man nur das Geborenwerden und Sterben berücksichtigt; auch die Wanderung sollte beachtet werden.

Indessen, wir beachten die Wanderung einstweilen noch nicht; wir betrachten sie als eine Störung, welche die Genauigkeit der statistischen Aufzeichnungen trübt, aber wir sehen einstweilen von dieser Störung ab, um vielleicht später die Lücke auszufüllen, und versetzen uns dadurch gleichsam auf ein Gebiet, wo die Störungen ohne Einfluss sind.

Die Aufrichtigkeit des Bekenntnisses lässt diesen Entschluss gefährlicher erscheinen als er ist; er verhindert nämlich keineswegs die Anwendung des Gefundnen auf die Wirklichkeit. Einmal wird bei dem Staat, auf dessen Aufzeichnungen die zu findenden Sätze und Methoden angewendet werden, nicht etwa vorausgesetzt, dass er gänzlich gegen die Nachbarschaft abgeschlossen sei; sondern nur dass die Wirkungen des Wanderns verschwinden. Die Wirkungen verschwinden aber dann, wenn für jedes aus- oder eingewanderte $x$jährige Individuum dieser oder jener Beschaffenheit gleichzeitig ein ebenso

beschaffenes, ebenso altes Individuum ein- oder auswandert. Zugegeben, dass in diesem strengsten Sinne die Wanderung niemals ganz ausgeglichen wird, so geht doch daraus hervor, dass sie geringere Störungen bringt, als man befürchtet.

Je grösser ferner das bevölkerte wirkliche Gebiet ist, desto leichter werden die Störungen des Wanderns vernachlässigt werden können: denn der Zweck, den man durch Aenderung des Wohnortes zu erreichen wünschte, wird dann um so leichter im Innern des Gebietes schon erreichbar sein, also ohne Wanderung im störenden Sinne, nämlich ohne Ueberschreitung der Grenze.

Endlich für gewisse besondre Untersuchungen, z. B. für Kindersterblichkeit, wird selbst in kleinen Gebieten die Wanderung ungefährlich, weil das Wandern aus Gründen, die von selbst einleuchten, bei Kindern nicht beträchtlich ist.

Uebrigens, wenn man auch den Einfluss des Wanderns in der Theorie schon sogleich beachten wollte, was hilft es, da die Praxis noch weit davon entfernt ist, die nöthigen Aufzeichnungen zu besitzen?

Schon aus diesem praktischen Grunde hat man bisher immer, und werden auch wir, die Störungen vorläufig als ausgeglichen betrachten. Die Mittel, die man etwa hätte, um dem Mangel der Praxis abzuhelfen, gehören eigentlich nicht hierher; es sei jedoch einiges davon angedeutet.

Am schwierigsten, und vielleicht sogar unmöglich, möchte es sein, den Einfluss der Wanderungen auf die Resultate zweier Volkszählungen nachzuweisen. Es gehörte dazu in der That die genaue Aufzeichnung des Falles, sobald irgend jemand in der Zwischenzeit die Grenzen des Gebietes überschreitet; wozu man nur durch Maasregeln gelangen könnte, die mir undurchführbar scheinen. Bedauernswerth wie dieser Uebelstand sein mag, so ist er doch für die Erforschung der Sterblichkeit unwichtig, denn sie wird weit sicherer, wie wir sehen werden, auf das Material der Geburts- und Sterberegister begründet. Aus diesem letztern Material liesse sich der Einfluss der Wanderung in der That so gut als ganz entfernen, wenn bei dem jährlichen Abschluss der Sterberegister jedes Gebietes alle diejenigen Individuen ausgezogen würden, welche auf einem andern Gebiete geboren sind. Wenn nun eine grosse Anzahl von Staatsgebieten, z. B. alle europäischen Staaten, jährlich ihre fremden Verstorbenen dem Heimatslande mittheilten, so würden die Registerauszüge zum Zwecke der Sterblichkeit sich dahin corrigiren lassen, dass nur die Wanderung über die Aussengrenzen des Vereins von Staaten, anstatt eines einzigen Staates, störend blieben. —

Doch das nur nebenbei. Wir beachten einstweilen die Wanderung nicht, begnügen uns daher mit den Hilfsmitteln der Geburtenfolge und Absterbeordnung, und erwähnen nur noch die Anschauungen, deren wir bedürfen, um durch Verbindung beider Hilfsmittel die verschiedenen Gesammtheiten von Lebenden und Verstorbenen darzustellen.

Erstens, wir nehmen an, dass alle Gebornen den Einwirkungen einer und derselben Absterbeordnung $f(x)$ ausgesetzt sind, über deren besondre Eigenschaften wir freilich nichts aussagen. Dieselbe Annahme wird stets gemacht, wo sich die Bevölkerungsstatistik mit Untersuchungen über Sterblichkeit beschäftigt, stillschweigend oder ausdrücklich. Jedoch trotz der Allgemeinheit des Gebrauchs entsteht die Frage, ob der Gebrauch gerechtfertigt ist. Die Frage lässt sich mit ja beantworten aus Gründen, denen man bisher, wie mir scheint, nicht die nöthige Aufmerksamkeit gewidmet hat.

Es wäre nämlich allerdings eine Vorausnahme dessen, was erst zu finden ist, wenn man sagen wollte, dass alle Gebornen einer und derselben Absterbeordnung in Wirklichkeit unterliegen. Wir enthalten uns daher einer solchen Behauptung ganz und gar (obgleich sie vielleicht bewiesen werden kann), denn der Beweis fordert, als ein Erfahrungsbeweis, die möglichst ausgedehnte Verarbeitung des geeigneten Materials nach zuverlässigen Methoden.

Wir behaupten nur, dass sich die allgemeinen Eigenschaften der Gesammtheiten von Lebenden und Gestorbenen auch mit Hilfe dieser Annahme finden lassen, weil durch entsprechende Auslegung der gefundenen Sätze die Wirkungen der Annahme wieder verschwinden. Das nähere darüber versparen wir uns bis zum Schlusse des vierten Kapitels, weil hier, ehe noch die Gesammtheiten dargestellt und Sätze gefunden sind, über die Auslegung nur unbequem gesprochen werden könnte.

Wir behaupten ferner, dass die Annahme einer herrschenden Absterbeordnung unschädlich ist, wenn es gilt dieselbe d. h. die Werthe von $f(x)$ und $f(x') - f(x'')$ zu berechnen, sei es direct oder indirect, sobald man nur die Auslegung der gefundenen Werthe danach einrichtet, oder was dasselbe ist, die Frage vorsichtig genug stellt. Auch darauf kommen wir zurück.

Die Annahme einer herrschenden Absterbeordnung wird sich also für die beiden Zwecke unsrer Untersuchung als unschädlich erweisen.

Zweitens nehmen wir an, dass schon eine unendlich kleine Anzahl von Gebornen der Absterbeordnung unterliegt. Vergleicht man den Ursprung des ganzen Gedankens der Absterbeordnung, so scheint in dieser Annahme eine unglaubliche Willkür zu liegen, denn nur für möglichst grosse und nicht für kleine endliche Gesellschaften von Gebornen kann behauptet werden, dass sie einer nahezu stätigen Verminderung durch das Absterben unterliegen, geschweige denn für unendlich kleine Zuwächse zur Menge der Gebornen. Es scheint als sei die Annahme das gerade Entgegengesetzte dessen, was man sich einigermassen könne gefallen lassen.

Nichts desto weniger finden wir durch diese Annahme allgemeine Sätze, von deren Richtigkeit man sich durch eigene unabhängige Ueberlegung in jedem Augenblick überzeugen kann. Und zwar wieder dadurch, dass die Auslegung des gefundenen in einer solchen Weise geschieht, dass die gefährlichen Wirkungen jener Annahme wieder verschwinden. Insbesondre wird zur Ermittlung

der Werthe $f(x)$ und $f(x') - f(x'')$ die Fragestellung so gefasst, dass nicht nur keine Gefahr entsteht, sondern dass sie sogar eine exactere Form gewinnt. Auch darauf werden wir zurückkommen.

Einstweilen genüge die Bemerkung, dass jene beiden so kühn erscheinenden Annahmen nichts anders sind als die Hilfsmittel, um die mathematische Behandlung einzuleiten. Es müssen zu diesem Zweck die wirklichen Vorgänge, denen man anders nicht beikommen kann, durch möglichst ähnliche gedachte Vorgänge ersetzt werden; und was für die letztern gefunden ist, kann dadurch für die erstern nutzbar werden, dass man nachträglich wieder hinwegdenkt, was anfangs hinzugedacht wurde. Es sind also nicht eigentlich die Vorgänge auf einem bevölkerten Gebiet, die wir untersuchen; sondern es sind andre möglichst analoge, rein gedachte Vorgänge, die sich leicht erforschen lassen, weil sie die Anwendung der Mathematik gestatten; und von denen man sich von Satz zu Satz überzeugen wird, dass sie zu gleicher Zeit über die Vorgänge auf einem bevölkerten Gebiet bei richtiger Benützung den richtigen Aufschluss geben.

Hiermit werden wohl alle Hilfsmittel und Voraussetzungen, deren wir uns bedienen werden, erschöpft sein; vielleicht sind sie sogar mit zu grosser Peinlichkeit besprochen. Wir bitten es zu entschuldigen durch den Umstand, dass man gewöhnlich auf diesem Gebiete die Voraussetzungen gar nicht oder nicht gründlich erwähnt, wodurch so viele Verwirrung entsteht.

Zweites Capitel.

Gesammtheiten von Lebenden.

Die Gesammtheiten von Lebenden und Verstorbenen darzustellen, die durch Angaben über Geburtszeit, Erfüllungszeit, Alter bestimmt sind, das ist wie erwähnt unsre Aufgabe. Der Anfang sei mit den Gesammtheiten der Lebenden gemacht und zwar, der Einfachheit halber, mit denjenigen, zu deren Bestimmung je zwei von den drei Punkten (der Geburtszeit, der Erfüllungszeit, des Alters) gegeben sind.

Es sei die Geburtszeit t_0 gegeben und das Alter x; so wird sich die Gesammtheit derjenigen Individuen, welche, geboren zur Zeit t_0, das Alter x erreichen, leicht darstellen lassen. Denn es werden zur Zeit t_0 geboren: $dt_0 . F'(t_0)$ Individuen; von einer Einheit Geborner erreichen $f(x)$ das Alter x; die Absterbeordnung wirkt auf jede noch so kleine Zahl von Gebornen; also ist die gesuchte Gesammtheit darstellbar durch

$$dt_0 . F'(t_0) . f(x)$$

Die Gesammtheit ist identisch mit jeder andern Gesammtheit, die durch

zwei von den genannten drei Punkten bestimmt ist, weil durch zwei von den drei Punkten zugleich der dritte bestimmt ist (vergl. den Anfang des ersten Kap.). Nur in andrer Form erscheinen die übrigen durch zwei Punkte bestimmten Gesammtheiten, in Formen, die man leicht findet, sobald man in dem Ausdruck $dt_0 . F'(t_0) . f(x)$, vermöge der Gleichung $x = t - t_0$, die Veränderlichen tauscht. Man erhält auf diese Weise:

$$dt_0 . F'(t_0) . f(x) = dt . F'(t-x) . f(x) = dt_0 . F'(t_0) . f(t-t_0) = -dx . F'(t-x) . f(x)$$

also viererlei Gesammtheiten, die begrifflich einander gleich sind, nämlich die Gesammtheiten, die man auf einem Gebiet mit stätiger Geburtenfolge bestimmt hat durch Angabe:

erstens: eines Punktes der Geburtszeit und eines Punktes des Alters;
zweitens: der Erfüllungszeit (beweglich gedacht) und des Alters;
drittens: der Geburtszeit und der Erfüllungszeit;
viertens: des Alters (beweglich gedacht) und der Erfüllungszeit. Der Ausdruck für die letztere Gesammtheit muss ein negatives Vorzeichen erhalten, wenn er den andern gleichgesetzt wird, weil das Alter im entgegengesetzten Sinne wie die Geburtszeit wächst.

Also wie überall, so auch auf einem Gebiete mit stätiger Geburtenfolge, sind es immer begrifflich dieselben Gesammtheiten, möge man sie durch irgendwelche zwei von den drei Punkten bestimmt haben. Aber diese Gesammtheiten sind auf einem Gebiet mit stätiger Geburtenfolge, keine endlichen, sondern unendlich kleine Grössen. Die endlichen Gesammtheiten, die wir sogleich entwickeln werden, sind nicht mehr alle begrifflich einander gleich, und wenn man sie doch zuweilen verwechselt findet, so rührt das entweder von der Willkür her, anstatt der stätigen Geburtenfolge sich eine intermittirende zu denken; oder von der Unvorsichtigkeit, die Eigenschaften der unendlich kleinen Gesammtheiten auf endliche zu übertragen. —

Die unendlich kleinen Gesammtheiten sind an sich ohne Wichtigkeit, weil man sie in der Wirklichkeit nicht nachweisen kann, aber sie dienen dazu, die nachweisbaren endlichen zu finden. Man wird aus jedem der vier unendlich kleinen Ausdrücke den Ausdruck einer andern endlichen Gesammtheit finden, wenn man zwischen festen Grenzen der jedesmaligen Veränderlichen integrirt, also im ersten und dritten Ausdruck zwischen den Grenzen t_0' bis t_0'', wobei $t_0' < t_0''$; im zweiten von t' bis t'', wobei $t' < t''$; im vierten zwischen x'' bis x', wobei $x'' > x'$. Was die Richtung der Integration betrifft, so schreiten wir immer vom frühst gebornen zum spätest gebornen vor (also in der Richtung der Geburtszeit und der Erfüllungszeit, jedoch, bei fester Zeit, gegen die Richtung des wachsenden Alters); sodass wir mit der Art, wie die Gebornen aufgezählt wurden, in Uebereinstimmung bleiben.

Nachdem auf diese Weise vier verschiedne Gesammtheiten gewonnen sind, schreiben wir den Ausdruck für die zweite und vierte noch einmal so an, wie er erscheint, wenn man unbeschadet der Gleichheit zur Veränderlichen t_0 übergeht. Denn so erhalten wir eine consequent durchführbare symbolische Bezeichnung, indem man die dann erscheinenden Integrationsgrenzen als Indices verwendet. Man erhält auf diese Weise:

$$f(x).\int_{t_0'}^{t_0''} dt_0.\ F'(t_0) = \Big\{F(t_0'')-F(t_0')\Big\} f(x) \qquad = {}_{t_0'}^{t_0''}V(x) \quad . \ . \ 1$$

$$f(x).\int_{t'}^{t''} dt.\ F'(t-x) = f(x).\int_{t_0'=t'-x}^{t_0=t''-x} dt_0.\ F'(t_0) = \Big\{F(t''-x) - F(t'-x)\Big\} f(x) = {}_{t'-x}^{t''-x}V(x) \quad . \ . \ 2$$

$$\int_{t_0'}^{t_0''} dt_0.\ F'(t_0).\ f(t-t_0) \qquad = {}_{t_0'}^{t_0''}V(t) \quad . \ . \ 3$$

$$-\int_{x''}^{x'} dx.\ F'(t-x).f(x) = \int_{t_0=t-x''}^{t_0=t-x'} dt_0.\ F'(t_0).\ f(t-t_0) \qquad = {}_{t-x''}^{t-x'}V(t) \quad . \ . \ 4$$

In der Gleichung 1. und 2. führt die Integration auf algebraische Verbindungen der Functionen $F(t_0)$ und $f(x)$; in den Gleichungen 3. und 4. hingegen muss man bei der angedeuteten Integration stehen bleiben. Dadurch unterscheidet sich das zweite Paar von Gesammtheiten sehr wesentlich vom ersten. Es ist der benützten Methode eigenthümlich, dass sie diese analytisch darstellbare (wenn auch nicht algebraische) Verbindung zu Tage fördert.

Auf der rechten Seite jeder Gleichung befindet sich das Symbol, wodurch wir die einzelnen Gesammtheiten bezeichnen: V, weil es Gesammtheiten von Lebenden sind (*vivo*); links die Indices, hergenommen von den Integrationsgrenzen, wenn die Geburtszeit als Veränderliche gewählt wird; rechts in Klammern die als constant betrachtete Grösse x oder t, als deren Function die einzelnen Gesammtheiten erscheinen. Nun die Erklärung:

1. ${}_{t_0'}^{t_0''}V(x)$, die Gesammtheit derjenigen, die, stammend aus der Geburtszeit t_0' bis t_0'', das Alter x erreichen; z. B. der Theil von den Gebornen des Jahrs 1850, der das Alter 7 erreicht.

2. ${}_{t'-x}^{t''-x}V(x)$, die Gesammtheit derjenigen, die in der Zeit t' bis t'' das Alter x erfüllen; z. B. diejenigen, welche im Kalenderjahr 1868 das Alter von 20 Jahren erreichen.

3. ${}_{t_0'}^{t_0''}V(t)$, die Gesammtheit derjenigen, welche aus der Geburtszeit t_0' bis t_0'' stammend, die Zeit t erreichen; z. B. diejenigen, welche, geboren im Jahr 1860, noch beim Beginn des 3. Decbr. 1864 vorhanden waren.

4. $\overset{t-x'}{\underset{t-x''}{\vdots}} V(t)$, diejenigen, welche zur Zeit t zwischen dem höchsten Alter x'' und dem niedersten x' standen (wir zählen vom ältesten zum jüngsten, weil wir nach fortschreitender Geburtszeit zählen müssen); z. B. diejenigen, welche am Anfang des 3. Decbr. 1867 im Alter 20 bis 19 stehen. —

Die Gesammtheiten 1. und 2. unter sich, sowie auch 3. und 4. unter sich, sind zwar verschieden, aber sie sind nicht *wesentlich* verschieden, so lange im ersten Paar das x, im zweiten das t als unbeweglich gedacht wird. Wir thun das vorerst und bemerken sofort, dass die erste und zweite Gesammtheit begrifflich zusammen fallen, wenn man setzt

$$t_0'=t'-x \text{ und } t_0''=t''-x$$

während die dritte und vierte Gesammtheit zusammenfallen, sobald

$$t_0'=t-x'' \text{ und } t_0''=t-x'$$

Hingegen kann das erste Paar von Gesammtheiten niemals mit dem zweiten Paar begrifflich zusammenfallen.

Zum Beispiel für das erste Paar: es ist begrifflich dasselbe, ob ich von denen spreche, die geboren in den Jahren 1841, 42 und 43, das Alter von 5 Jahren erreichen ($t_0'=1840$; $t_0''=1843$); oder von denen, die im Lauf der Kalenderjahre 1846, 47, 48 das Alter 5 erfüllen ($t'=1840+5$, $t''=1843+5$). Für das zweite Paar von Gesammtheiten: diejenigen, die beim Anbruch des 3. Decbr. 1864 vorhanden waren, geboren in den Jahren 1863 und 64; oder im Alter von 365+337 Tagen bis 0 Tagen standen (d. h. im Alter von etwa $1,_9$ Jahren bis 0 Jahre) sind identisch.

Hingegen können die am 3. Decbr. 1864 oder in sonst einem *Zeitpunct* vorhandenen aus einer Geburtsperiode oder Altersclasse *niemals begrifflich* mit denen zusammen fallen, die aus einer Geburtsperiode oder in einer Zeitperiode ein gewisses *Alter* erreichen; das ist bei stätiger Geburtenvertheilung durchaus undenkbar. Man hat da zwei Paare von höchst wesentlich verschiedenen Gesammtheiten der Lebenden zu unterscheiden. —

Die Gesammtheiten 1. und 2. enthalten lauter gleichaltrige Individuen; jedes ist zu einer andern Zeit geboren und erfüllt also sein Alter x zu einer andern Zeit; sie sind nicht und können nicht *gleichzeitig* sein.

Die Gesammtheiten 2. und 3. enthalten lauter gleichzeitig neben einander vorhandene Individuen; jedes aber ist zu einer andern Zeit geboren, also können sie nicht *gleichaltrig* sein. Es ist eine höchst verwerfliche Ungenauigkeit mancher Schriftsteller, Individuen gleichaltrig zu nennen, wenn sie nur zwischen denselben Altersgrenzen stehen.

Aus dieser Unterscheidung folgt, dass zum Nachweis der Grösse dieser oder jener Gesammtheit ganz durchaus verschiedene Hilfsmittel dienen. Nämlich:

Die Gesammtheiten 1. und 2. können (direct) nur nachgewiesen werden durch *fortlaufende* Aufzeichnungen über das Erleben der Geburtstage (auch

der spätern Geburtstage); solche fortlaufende Aufzeichnungen nennt man Register. Es müsste in ein Register eingetragen werden, dass der und der im Alter x noch gelebt hat. Es ist mir nicht wahrscheinlich, dass die Bevölkerungsstatistik zu solchen Aufzeichnungen (die bei Rentanstalten existiren) gelangen wird, jedenfalls existiren sie gegenwärtig nicht.

Hingegen die Gesammtheiten 4. und 5. sind nur durch Listen nachweisbar, d. h. durch einmalige Aufzeichnungen des Bestands zu einer gewissen Zeit. Sie werden fast überall bei den Volkszählungen nachgewiesen, wo man bald nach Geburtsperioden (wie in Preussen), bald nach Altersklassen (wie in Sachsen), unterscheidet. —

Die Mitglieder der ersten Gesammtheit erfüllen ihr Alter x während einer Zeitstrecke, jedes in einem andern Punkt derselben, die von $t=t_0'+x$ bis $t=t_0''+x$ dauert und also dieselbe Länge hat, wie die Geburtsperiode, aus der sie stammen.

Die Angehörigen der zweiten Gesammtheit, die ihr Alter x von der Zeit t' bis t'' erfüllen, stammen aus der Geburtszeit von $t_0=t'-x$ bis $t_0=t''-x$, welche also dieselbe Dauer hat, wie die Strecke der Erfüllungszeit.

Die Individuen der dritten Gesammtheit stehen zwischen dem Alter $x=t-t_0'$, als dem höchsten, und $x=t-t_0''$ als den niedersten.

Endlich wer zur vierten Gesammtheit gehört ist geboren zwischen $t_0=t-x''$ und $t_0=t-x'$. —

Die erste wie die zweite Gesammtheit ist nur abhängig (abgesehen von $f(x)$) von der Menge der Geburten, die während der entsprechenden Geburtsperiode stattfanden; sie ist aber ganz unabhängig davon, wie sich die Geburtenmenge innerhalb jener Zeitstrecke vertheilt, also unabhängig von der Dichtigkeit; man erkennt es daraus, dass, wegen der ausführbaren Integration, der Differenzialquotient von $F(t_0)$ verschwindet.

Hingegen die dritte und vierte Gesammtheit sind abhängig von der Geburtendichtigkeit jedes Zeitpunctes während der entsprechenden Geburtsperiode; und von jedem Werthe der Absterbeordnung, den dieselbe für $x=t-t_0'$ bis $x=t-t_0''$ respective für $x=x''$ bis $x=x'$ annimmt. Kein Unterschied der beiden Paare von Gesammtheiten ist so wichtig als dieser. Es ist falsch zu sagen, die Grösse der Alters- oder Geburtsclasse hänge nur von den Werthen der Absterbeordnung ab; es ist sogar falsch, wenn man die Geburtenmenge des entsprechenden Zeitraums noch hinzuerwähnt: die Dichtigkeit der Geburtenfolge muss als bestimmend genannt werden. Wir haben schon im vorigen Kapitel erwähnt, wie nahe Wappaeus daran war, diesen Satz richtig auszusprechen.

Die bezeichnenden Eigenschaften der vier bis jetzt untersuchten Gesammtheiten sind hierdurch wohl hinreichend geschildert; wir gehen dazu über, Grenzwerthe für die Grösse einer jeden aufzusuchen. —

Die erste Gesammtheit ${}_{t_0'}^{t_0''}V(x)$ ist eingeschlossen zwischen den Grenzen ${}_{t_0'}^{t_0''}V(o)=F(t_0'')-F(t_0')$ und ${}_{t_0'}^{t_0''}V(\omega)=0$, was uns Gelegenheit gibt zu bemerken,

dass die Geburtenmenge eines Zeitraums als besondrer Fall der ersten Gesammtheit von Lebenden aufgefasst werden kann; oder auch als besondrer Fall der zweiten Gesammtheit. Die Gebornen eines Zeitraums sind identisch mit denen, die aus dem betr. Zeitraum oder in demselben das Alter 0 erreichen.

Wichtigere Grenzen erhält man für ${}^{t_0''}_{t_0'}V(x)$, wenn man jeden Werth von $dt_0 . F'(t_0)$ nicht mit $f(x)$, sondern mit einem kleinern, resp. grössern Werth als $f(x)$ multiplicirt, und zwar insbesondere:

$${}^{t_0''}_{t_0'}V(x) > \int_{t_0'}^{t_0''} dt_0 . F'(t_0) . f(t_0''+x-t_0) \text{ und } {}^{t_0''}_{t_0'}V(x) < \int_{t_0'}^{t_0''} dt_0 . F'(t_0) . f(t_0'+x-t_0)$$ woraus, mit Bezug auf die Grundeigenschaften:

$${}^{t_0''}_{t_0'}V(x) = {}^{t_0''}_{t_0'}V(t = t_0' + \vartheta'[t_0''-t_0'])$$

(das Zeichen ϑ' bezeichnet eine nicht näher bekannte zwischen 0 und 1 enthaltene Zahl); das heisst:

Die Gesammtheit derer, die aus der Geburtszeit t_0' bis t_0'' das Alter x erfüllen, ist grösser als die Gesammtheit derer, die aus derselben Geburtszeit stammend, die Zeit $t_0''+x$, d. h. den letzten Zeitpunkt der Erfüllung des Alters x, erreichen; und kleiner als die Gesammtheit derer, die aus derselben Geburtszeit den ersten Zeitpunkt der Erfüllung des Alters x, d. h. die Zeit $t_0'+x$, erreichen. Und irgendwo innerhalb der Erfüllungsperiode des Alters x liegt ein Zeitpunkt, welchen ebensoviele Individuen erreichen, als Individuen das Alter x erfüllen. Genauer kann die Lage dieses Zeitpunktes erst angegeben werden, wenn Geburtendichtigkeit und Absterbeordnung bekannt sind.

Aehnliche Grenzen können für die zweite Gesammtheit auf demselben Weg gefunden werden; aber wir übergehen sie der Kürze halber. —

Die dritte Gesammtheit ${}^{t_0''}_{t_0'}V(t)$, wenn man anstatt der vielen Werthe von $f(t-t_0)$ nur den kleinsten resp. grössten einführt, liegt zwischen folgenden Grenzen:

$${}^{t_0''}_{t_0'}V(t) > \left\{F(t_0'') - F(t_0')\right\} f(t-t_0') \text{ und } {}^{t_0''}_{t_0'}V(t) < \left\{F(t_0'') - F(t_0')\right\} . f(t-t_0'')$$ woraus, entsprechend dem obigen:

$${}^{t_0''}_{t_0'}V(t) = {}^{t_0''}_{t_0'}V(x = t - t_0'' + \vartheta''[t_0''-t_0'])$$

worin wieder ϑ'' eine zwischen 0 und 1 enthaltene Zahl bedeutet. Das heisst:

Von den Gebornen der Zeitstrecke von t_0' bis t_0'' erreichen mehr Individuen die Zeit t, als von denselben Gebornen das Alter erfüllen, dessen Erfüllungszeit bei t beginnt; und weniger Individuen erreichen die Zeit t als von derselben Generation das Alter erfüllen, dessen Erfüllungszeit bei t aufhört. Und es gibt ein zwischen beiden genannten liegendes Alter, das ebenso viele aus der Generation erfüllen, als die Zeit t erreichen. Dieser Bemerkung bedient man sich, um in Ermangelung eines bessern Materials die Listen der

Volkszählungen zur näherungsweisen Erforschung der Sterblichkeit zu benutzen, wie man im zweiten Theil sehen wird. Aehnliche Grenzen lassen sich für die vierte Gesammtheit finden und noch bequemer aussprechen. —

Die Gesammtheiten des ersten Paars (1. und 2.) haben also als Grenzwerthe besondre Fälle der Gesammtheiten des zweiten Paars (3. u. 4.) und ebenso die Gesammtheiten des zweiten Paars Grenzen, die den Gesammtheiten des ersten Paars entnommen sind. Und jede Gesammtheit des einen Paars ist einer besonders zu bestimmenden Gesammtheit des andern Paars an Grösse gleich, wenn auch dem Begriff nach immer die so stark betonte Verschiedenheit bestehen bleibt. —

Die bis jetzt auf analytischem Weg gewonnenen Sätze lassen sich graphisch aufs deutlichste versinnlichen. Zu diesem Zweck ist die Figur 1. entworfen, deren einzelne Theile — die Curve NP, deren Ordinaten die Mengen der bis zur Zeit t_0 gebornen bedeuten, und die Curve PB, deren von AB aus gerechnete Ordinaten das Absterben versinnlichen — schon erwähnt sind. Für jeden Zuwachs zu den Gebornen hat man das Absterben in ähnlicher Weise dargestellt, wie für den Zuwachs AP; je kleiner man sich die Zuwächse denkt, desto genauer stimmt diese, jetzt nur näherungsweise Darstellung mit der analytischen überein.

Die Gesammtheit ${}_{t_0'}^{t_0''} V(x)$ erscheint als die Summe aller derjenigen Ordinaten, die die $x$jährig werdenden aus jedem einzelnen Geburtenzuwachs darstellen. Für unendlich kleine Geburtenzuwächse sind es Punkte einer Curve QR, die entsteht, wenn man die Curve NP für einen um x vorgeschobenen Anfangspunkt der Abscissen noch einmal construirt. In unsrer Zeichnung sind nur die Endpuncte der Ordinaten, die summirt werden sollen, durch die Curve QR verbunden. Die zweite Gesammtheit bedarf keiner besonderen Construction.

Die dritte Gesammtheit ${}_{t_0'}^{t_0''} V(t)$ erscheint als Summe der Ordinaten, welche die $t-t_0$ jährig werdenden aus jedem Zuwachs der Gebornen vorstellen. Nimmt man die Abscisse OM gleich t, so erscheinen diese Ordinaten alle als Theile der Linie MP, sie liegen also alle auf einer der Ordinatenaxe parallelen Geraden. Die vierte Gesammtheit ähnlich.

Die charakteristischen Merkmale sind also, dass die Ordinaten der verschiedenen Absterbecurven, welche summirt eine Gesammtheit des ersten Paars vorstellen, alle an einer Curve liegen, welche entsteht, wenn man die Curve der Gebornen auf der Axe der Zeit um x Einheiten vorwärts verlegt.

Dagegen die Ordinaten, deren Summe eine der Gesammtheiten des zweiten Paars vorstellen, liegen alle auf einer geraden Linie, die entsteht, wenn man eine Parallele zur Axe der Gebornen in der Entfernung t errichtet.

Die Grenzen, zwischen denen die verschiedenen Gesammtheiten liegen, können mit einer entsprechenden Construction so leicht dargestellt werden, dass ein näheres Eingehen darauf unnöthig erscheint.

Es ist an dieser Fig. 1, sowie an allen andern, ganz unwesentlich, dass sie immer steigende Geburtendichtigkeiten darstellt; es soll dadurch nichts als die Bequemlichkeit der Zeichnung erreicht werden; eine ähnliche Bemerkung gilt für die Absterbecurven. —

Ehe wir das Verhalten der Gesammtheiten des ersten Paars bei wachsendem x und des zweiten Paars bei wachsendem t untersuchen, stellen wir zuerst die wichtigsten Gesammtheiten der Verstorbenen dar, damit uns das Auftreten derselben nicht überrasche; und kehren erst im übernächsten Kapitel hierher zurück.

Drittes Capitel.

Gesammtheiten von Verstorbenen.

Um auch hier vom einfacheren zu beginnen, suchen wir zuerst den Ausdruck für die Gesammtheit derjenigen, die, geboren zur Zeit t_0, im Alter x verstorben sind. Die Gebornen des Zeitpunctes t_0 sind $dt_0.F'(t_0)$; von einer Einheit Geborner sterben im Alter x folgende: $-f'(x)dx$ (das negative Zeichen, damit man die positive Zahl der Verstorbenen aus dem an sich negativen Zuwachs $f'(x)dx$ erhalte). Auch der kleinste Zuwachs zu den Gebornen unterliegt der Absterbeordnung, nach unsrer Annahme, also hat man als Ausdruck der geforderten Gesammtheit:

$$-dt_0.\ F'(t_0).\ f'(x).\ dx$$

Wenn man darin einmal, vermöge der Gleichung $x=t-t_0$, das x durch t; und dann das t_0 durch t ersetzt, so findet man:

$$-dt_0.\ F'(t_0).\ f'(x).\ dx = -dt_0.\ F'(t_0).\ f'(t-t_0).\ dt = -dt.\ F'(t-x) f'(x) dx$$

das heisst: es ist dasselbe, ob man eine Gesammtheit von Verstorbenen bestimme:

durch Angabe eines Punktes der Geburtszeit und des Alters;

oder desselben Punktes der Geburtszeit und des Punktes der Erfüllungszeit jenes Alters;

oder durch Angabe desselben Alters und desselben Punktes der Erfüllungszeit.

Jedoch die so gewonnenen Gesammtheiten von Verstorbenen sind, wegen der Stätigkeit des Geborenwerdens und des Absterbens, unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung. Endliche Gesammtheiten würden durch eine solche Bestimmung nur entstehen, wenn erstens eine endliche Menge von Gebornen auf einen einzelnen Zeitpunkt fielen (was eben in einem bevölkerten Gebiete nicht der Fall ist) und wenn zugleich zweitens die Todesfälle aus einer Gesellschaft von Gebornen alle auf gewisse Altersstufen vereinigt wären (während sie doch in jedem Alter eintreten). Wo man sich so gewaltsamer An-

nahmen enthält und bei der Natur der Sache bleibt, da reicht die bisherige Bestimmung nicht aus, um endliche Gesammtheiten zu liefern, wie wir sie doch zu erhalten streben. —

Um uns diesem Ziele zu nähern, stellen wir zunächst unendlich kleine Gesammtheiten erster Ordnung her. Man wird solche erhalten, und zwar je zwei aus jedem der obigen drei Ausdrücke, sobald man jeden Ausdruck zwischen festen Grenzen der betreffenden Veränderlichen integrirt (in ganz analoger Weise, wie bei den Gesammtheiten der Lebenden verfahren wurde). Doch ist über die Richtung der Integration noch einiges zu bemerken.

Gerade wie es bei den Gebornen und bei den Lebenden geschah, so zählen wir wieder nach der wachsenden Zeit die Verstorbenen auf. Aber es kommen hier zweierlei Zeiten in Betracht: die Geburtszeit, woraus die Verstorbenen stammen, und die Zeit, worin der Tod eintrat. Also nicht nur nach wachsender Geburtszeit, sondern auch nach wachsender Sterbezeit muss integrirt werden. Wenn nun das Alter das Veränderliche ist, so ergibt sich aus dem gesagten folgende Regel:

Ist die Geburtszeit fest, so muss nach steigendem Alter, d. h. von x' noch x'' aufgezählt werden, damit man vom frühest Verstorbenen zum spätest Verstorbenen fortschreite;

Ist aber die Sterbezeit fest, so muss nach fallendem Alter, d. h. von x'' nach x' aufgezählt werden, damit man vom früher Gebornen zum später Gebornen fortschreite.

Durch Anwendung dieser Regel erhält man folgende Ausdrücke für die gewünschten Gesammtheiten von Verstorbenen, die unendlich kleine Grössen erster Ordnung sind, nämlich:

I. aus $-dt_0 . F'(t_0) . f'(x)dx$:	II. aus $-dt_0 . F'(t_0) . f'(t-t_0)dt$:	III. aus $-dt . F'(t-x) f'(x)dx$:
durch Integration nach t_0: $-dx . f'(x) . \int_{t_0'}^{t_0''} F'(t_0)dt_0 \ . \ . \ . \ (\alpha)$		
durch Integration nach x: $-dt_0 . F(t_0) . \int_{x'}^{x''} f'(x)dx \ . \ . \ . \ (\beta)$	durch Integration nach t: $-dt_0 . F'(t_0) . \int_{t'}^{t''} f'(t-t_0)dt \ . \ . \ (\beta)$	
	durch Integration nach t_0: $-dt \int_{t_0'}^{t_0''} F'(t_0) . f'(t-t_0)dt_0 \ . \ . \ (\gamma)$	durch Integration nach x: $+dt \int_{x''}^{x'} F'(t-x) . f'(x)dx \ . \ . \ . \ (\gamma)$
		durch Integration nach t: $-dx . f'(x) \int_{t'}^{t''} F'(t-x)dt \ . \ . \ . \ (\alpha)$

Man erhält also sechs verschiedene Gesammtheiten, für die wir jedoch keine symbolische Bezeichnung einführen, um mit diesem Hilfsmittel möglichst sparsam zu sein. Der Sinn ist folgender:

I(α): die Gesammtheit der im Alter x sterbenden, die aus der Geburtszeit t_0' bis t_0'' stammen. Die Integration lässt sich ausführen.

I(β): die aus der Geburtszeit t_0 stammenden, welche im Alter x' bis x'' sterben. Die Intergration ist ausführbar.

II(β): die aus der Geburtszeit t_0 stammenden, welche von der Zeit t' bis t'' sterben. Die Integration ist ausführbar.

II(γ): die zur Zeit t sterbenden, welche aus der Geburtszeit t_0' bis t_0'' stammen. Die Integration ist nicht ausführbar. Wegen des Vorzeichens bedenke man, dass zwar $+f'(t-t_0)dt_0=-f'(x)dx$ ist, also schon die positive Zahl der Verstorbenen des Alters $t-t_0$ bedeutet; integrirt man aber von t_0' nach t_0'', also nach steigender Geburtszeit, so werden die Verstorbenen zugleich nach fallendem Alter aufgezählt. Es muss daher das negative Vorzeichen vor das Integral treten, damit die Regel wegen der Aufzählung bewahrt bleibe.

III(γ): die zur Zeit t sterbenden, welche im Alter x'' bis x' stehen. Die Integration ist nicht ausführbar. Das Vorzeichen erklärt sich durch die Bemerkung, dass die Aufzählung zwar vom frühest gebornen zum spätest gebornen; aber zugleich vom spätest verstorbenen zum frühest verstorbenen vorschreitet. Folglich ist von den Erfordernissen der Aufzählung im positiven Sinn nur eines erfüllt. Das andre unerfüllte muss durch Wechsel des Vorzeichens ersetzt werden.

III(α): diejenigen, welche $x$jährig von der Zeit t' bis t'' sterben. Die Integration ist ausführbar.

Es sind sechs verschiedene Gesammtheiten. Aber diejenigen, welche durch Beifügung desselben griechischen Buchstabens kenntlich gemacht sind, können durch entsprechende Wahl der Integrationsgrenzen identisch gemacht werden; nämlich:

die mit α bezeichneten, wenn man setzt: $t_0'=t'-x$ und $t_0''=t''-x$;
die mit β bezeichneten, wenn man setzt: $x'=t'-t_0$ und $x''=t''-t_0$;
die mit γ bezeichneten, wenn man setzt: $t_0'=t-x''$ und $t_0''=t-x'$;

hingegen solche Gesammtheiten, die nicht aus demselben so entstehenden Paar entnommen sind, sind und bleiben begrifflich verschieden.

Wenn es überhaupt möglich wäre, unendlich kleine Grössen durch Beobachtung nachzuweisen, so würden sich die beiden mit α bezeichneten und die beiden mit β bezeichneten Gesammtheiten durch laufende Aufzeichnungen, also durch Registerführung nachweisen lassen; die beiden mit γ bezeichneten hingegen durch einmalige Aufzeichnung, also durch Listen.

Die Analogie mit den endlichen Gesammtheiten der Lebenden, leuchtet sofort ein: dort hatte man zwei Paare von Gesammtheiten, die unter sich wesent-

lich verschieden waren; hier hat man drei Paare, die unter sich wesentlich verschieden sind. —

Um nun auf endliche Gesammtheiten von Verstorbenen überzugehen, führen wir (mit Beachtung der Regeln über die Richtung) an den soeben besprochenen unendlich kleinen Grössen erster Ordnung noch eine Integration aus, und zwar wieder zwischen festen Grenzen der Veränderlichen. Est ist klar, dass wir dadurch nicht sechs, sondern nur drei endliche Gesammtheiten erhalten, und zwar je eine aus den mit I, mit II und mit III bezeichneten Ausdrücken, denn es macht keinen Unterschied, nach welcher Veränderlichen zuerst integrirt wird, wenn man nach beiden integrirt. Um auch hier eine consequente symbolische Bezeichnung zu erhalten, fügen wir der aus I und aus III entstehenden Gesammheit die Form bei, welche sie annimmt, wenn man auf die Veränderlichen t_0 und t übergeht, und erhalten so:

aus I: $$-\int_{t_0'}^{t_0''} dt_0 .\, F'(t_0) . \int_{x'}^{x''} f'(x)dx = -\int_{t_0'}^{t_0''} dt_0 .\, F'(t_0) . \int_{t=t_0+x'}^{t=t_0+x''} f'(t-t_0)dt = {}_{t_0'}^{t_0''}M_{t_0+x'}^{t_0+x''} \quad \ldots\ldots 5$$

aus II: $$-\int_{t_0'}^{t_0''} dt_0 .\, F'(t_0) . \int_{t'}^{t''} f'(t-t_0)dt = {}_{t_0'}^{t_0''}M_{t'}^{t''} \quad \ldots\ldots 6$$

aus III: $$+\int_{t'}^{t''} dt \int_{x''}^{x'} F'(t-x) .\, f'(x)dx = -\int_{t'}^{t''} dt \int_{t_0=t-x''}^{t_0=t-x'} F'(t_0) .\, f'(t-t_0)dt_0$$
$$= -\int_{x'}^{x''} dx . f'(x) . \int_{t'}^{t''} F'(t-x)dt = {}_{t-x''}^{t-x'}M_{t'}^{t''} \quad \ldots\ldots 7$$

Die Bezeichnung auf der rechten Seite der Gleichungen entspricht den früheren: M bedeutet, dass es sich um Gesammtheiten von Verstorbenen handelt (*morior*); die Indices auf der linken Seite von M geben die Geburtszeit der Verstorbenen an (in 5. u. 6. sind es festliegende Zeitstrecken, in 7. richtet sich die Geburtszeit nach dem Zeitpunkt t, worin jeder einzelne stirbt); die Indices auf der rechten Seite von M geben die Grenzen der Sterbezeit an (in 5. richtet sich die Sterbezeit nach der jedesmaligen Geburtszeit t_0, in 6. u. 7. sind die Grenzen der Sterbezeit fest).

Die drei so erhaltenen endlichen Gesammtheiten von Verstorbenen sind unter einander wesentlich verschieden; man kann nicht durch Einrichtung der Integrationsgrenzen eine Gesammtheit mit der andern gleich machen.

Die Bedeutung derselben ist folgende:

Aus I: die Gesammtheit derjenigen, welche, aus einer gegebenen Strecke der Geburtszeit stammend, zwischen gegebenen Altersgrenzen sterben. Z. B. die 20 bis 21 jährig Verstorbenen, welche im Jahr 1840 geboren waren; d. h. die 20 bis 21 jährig Verstorbenen der Generation von 1840. Diese Gesammtheit ist weitaus für die Erforschung der Sterblichkeit die wichtigste (wie wir sogleich sehen werden), aber sie wird beinahe nie von der Praxis nachgewiesen, nicht

weil es schwerer wäre, sondern aus nebensächlichen Gründen, auf die wir zu reden kommen.

Aus II: die Gesammtheit derjenigen, die, aus einer gegebenen Strecke der Geburtszeit stammend, zwischen zwei gegebenen Zeitpunkten sterben; z. B. wie viele von den im Jahr 1865 Verstorbenen gehören dem Geburtsjahr 1800 an? In Preussen hat man seit dem Jahr 1864 angefangen, diese Gesammtheit nachzuweisen, die nicht nur von der vorigen durchaus wesentlich verschieden, sondern für die Erforschung der Sterblichkeit am wenigsten geeignet ist.

Aus III: die Gesammtheit derjenigen, die innerhalb gegebener zeitlicher Grenzen zwischen gegebenen Altersgrenzen sterben. Z. B. die im Jahr 1850 zwischem Alter 5 und 4 verstorbenen. Der Nachweis dieser Gesammtheit ist am meisten verbreitet, z. B. in Sachsen, Bayern, und es wird sich finden, dass sie für unsre Zwecke sehr dienlich sein kann, wenn auch weniger dienlich, als die erste Gesammtheit.

Alle die drei Gesammtheiten sind nur durch Register, d. h. nur durch fortlaufende Aufzeichnung der Sterbefälle nachweisbar. —

Die erste der drei Gesammtheiten nannten wir die wichtigste für die Untersuchung der Sterblichkeit; der Grund liegt darin, dass sie sich, wegen der ausführbaren Integration (vergl. Gleichung 5.), auf eine sehr einfache Verbindung der beiden Urfunctionen zurückführen lässt; denn es ist

$$ {}^{t_0''}_{t_0'}M^{t_0+x''}_{t_0+x'} = \left\{F(t_0'')-F(t_0')\right\}.\left\{f(x')-f(x'')\right\}, $$

also gleich dem Produkt aus der Menge der von t_0' bis t_0'' Gebornen in die Zahl der x' bis x''jährigen Todten der Absterbeordnung. Wenn man also diese Gesammtheit nachgewiesen hat, so braucht die gefundene Zahl der Verstorbenen nur durch die Zahl der von t_0' bis t_0'' gebornen dividirt zu werden, damit man den Werth $f(x')-f(x'')$ finde. Diese Gesammtheit, und nur diese, gewährt ein Mittel, um direct über die Sterblichkeit Aufschlüsse zu geben, ohne dass man irgend eine Voraussetzung über die Geburtendichtigkeit oder über die Beschaffenheit der Absterbeordnung (etwa, dass sie durch eine gerade Linie dargestellt werden könne) zu machen brauchte. Aehnlich wie bei zwei Gesammtheiten von Lebenden ist diese Gesammtheit der Verstorbenen unabhängig von den einzelnen Werthen der Geburtendichtigkeit zwischen t_0' und t_0''.

Die beiden andern Gesammtheiten (Gleichung 6. u. 7.) stehen in keiner so einfachen Beziehung zur Absterbeordnung, sie können daher nur indirect, d. h. nur durch besondere Annahmen über Geburtendichtigkeit und Beschaffenheit der Absterbeordnung unserm Zwecke, die Sterblichkeit zu erforschen, dienstbar werden, denn sie sind von der Geburtendichtigkeit abhängig. Welcherlei Annahmen es seien, damit beschäftigen wir uns erst im zweiten Theil dieser Abhandlung. —

Aber wenn die erste Gesammtheit ein so einfaches Mittel bietet — wie

kommt es, dass sie von der praktischen Statistik niemals nachgewiesen wird? Man wird den Grund durch folgende Betrachtungen einsehen.

Die erste Gesammtheit umfasst die Verstorbenen des Alters x' bis x'' aus der Generation t_0' bis t_0''; um sie nachzuweisen, muss man wissen, in welcher Zeit die Sterbefälle liegen, damit man die geeigneten Register zu Rathe ziehen kann. Bezeichnet man den frühsten Punkt der Zeit, worin diese Verstorbenen liegen können, durch τ', den spätesten durch τ'', so wird man diese beiden Grössen leicht finden, wenn man (in Gleichung 5) den kleinsten resp. grössten Werth sucht, den t annimmt, während t_0 von t_0' bis t_0'' und x von x' bis x'' alle Werthe durchläuft. Es ist nämlich

$$\tau' = t_0' + x' \text{ und } \tau'' = t_0'' + x''$$
$$\text{woraus } \tau'' - \tau' = (t_0'' - t_0') + (x'' - x')$$

d. h. die Verstorbenen dieser Gesammtheit sind zu suchen in der Zeit, die beginnt, wenn der frühest geborne aus der Generation das Alter x' erfüllt; und die endet, wann der spätest geborne das Alter x'' erfüllt; die Zeitstrecke, worin die betreffenden Todesfälle liegen, hat eine Dauer gleich der Dauer der Geburtsperiode plus dem Altersspielraum.

Z. B.: wenn man nachweisen will, wie viele von den Gebornen der Jahre 1801, 02, 03, 04 im Alter 20 bis 23 verstorben sind, so hat man die Sterberegister der sieben Jahre 1821, 1822 .... und 1827 zu benutzen. Unter den vielen Verstorbenen dieser sieben Sterbejahre befinden sich alle diejenigen, die zu unsrer Gesammtheit gehören; in andern Sterbejahren können sich keine mehr davon befinden.

Aehnlich: diejenigen, welche 8—9jährig verstorben sind, stammend aus dem Geburtsjahr 1830, sind zu suchen in den Sterbejahren 1838 und 1839, wo sie neben andern Verstorbenen aufgezeichnet sind.

Hier erklärt sichs, warum die Praxis diese Gesammtheit nicht nachweist: die dazu gehörigen Verstorbenen liegen, für einjährigen Altersspielraum und einjährige Geburtsperioden, in zwei Sterbejahren, während die Praxis eine Vorliebe für jährliche Abschlüsse der Auszüge aus den Sterberegistern hat; und sie weiss nicht beides zu vereinigen. Manchmal versteht die Praxis, wie es scheint, nicht einmal, wo man die Verstorbenen dieser Gesammtheit eigentlich zu suchen hat, weil sie sich gänzlich in die falsche Vorstellung verwirrt, als fänden die Geburten alle am Anfang des Kalenderjahres statt. —

Bei der zweiten Gesammtheit (Gleichung 6.), die durch Geburtszeit und Sterbezeit bestimmt ist, lässt sich nach dem Alter fragen, das als niedrigster (ξ') und als höchstes (ξ'') vorkommt. Auf ähnliche Weise wie vorhin τ' und τ'' gefunden wurde, hat man:

$$\xi' = t' - t_0'' \text{ und } \xi'' = t'' - t_0'$$
$$\text{woraus } \xi'' - \xi' = (t'' - t') + (t_0'' - t_0');$$

das heisst, das niedrigste Alter, in dem ein Mitglied dieser Gesammtheit stehen

kann, ist dasjenige, das der Spätestgeborne gerade zur Zeit t', also am Anfang der Sterbezeit, erfüllt; das höchste vorkommende Alter ist dasjenige, welches der Frühestgeborne der Generation am Ende der Sterbezeit erfüllt. Der Altersspielraum ist so gross, wie die Dauer der Geburts- und Sterbeperiode zusammen genommen. Z. B. die im Jahr 1864 Verstorbenen, welche aus dem Jahr 1860 stammen, stehen alle zwischen dem Alter 3 und 5, haben also einen zweijährigen Altersspielraum. Unter den vielen 3 bis 5 jährig im Jahr 1864 Verstorbenen befinden sich, neben andern, alle diejenigen, welche von den Verstorbenen des Jahres 1864 aus dem Geburtsjahr 1860 stammen. In Preussen, wo man neuerdings diese Gesammtheit nachgewiesen hat, sind die Altersgrenzen nicht richtig angegeben worden (vergl. Zeitschrift des k. pr. stat. Bureaus, 1867, Seite 64, wo etwa hundertmal aus Versehen ein nur einjähriger Altersspielraum für Gesammtheiten von Verstorbenen angegeben ist, die wie unser obiges Beispiel bestimmt sind). —

Endlich, um auf die dritte Gesammtheit (Gleichung 7.) zu kommen: Die untere Grenze (τ_0') und die obere (τ_0'') der Geburtszeit woraus die x'' bis x' jährig von der Zeit t' bis t'' Verstorbenen stammen, findet sich:

$$\tau_0' = t' - x'' \text{ und } \tau_0'' = t'' - x'$$

$$\text{woraus } \tau_0'' - \tau_0' = (t'' - t') + (x'' - x')$$

das heisst: die Geburtsperiode beginnt mit der Geburtszeit desjenigen, der am Anfang der Sterbeperiode das obere Grenzalter erfüllt; sie endet mit der Geburtszeit desjenigen, der am Ende der Sterbeperiode das untere Grenzalter erfüllt. Die Geburtsperiode, woraus die Mitglieder dieser Gesammtheit herrühren, ist so lang wie die Sterbeperiode und der Altersspielraum zusammengenommen. Alle Mitglieder der Gesammtheit stammen aus jener Geburtsperiode, aus welcher übrigens noch viele andre x' bis x'' jährig Verstorbene oder von t' bis t'' Verstorbene herrühren, die nicht zu unserer Gesammtheit gehören.

Z. B. die 5 bis 2jährig in den Jahren 1817 und 1818 Verstorbenen sind geboren in den fünf Kalenderjahren 1812, 1813, 1814, 1815, 1816. Aehnlich: die 1 bis 0 jährig im Jahr 1867 Verstorbenen stammen her aus den Geburtsjahren 1866 und 1867.

Es ist sehr zu bedauern, dass so einfache Dinge so weitläufig besprochen werden müssen; es muss aber geschehen, um endlich die Vorstellungen der stätigen Geburtenfolge und des stätigen Absterbens einzubürgern. —

In den Figuren 2., 3. und 4. ist die graphische Darstellung der drei Gesammtheiten der Verstorbenen gegeben.

Wie die Gesammtheiten von Lebenden versinnlicht werden konnten durch Summirung einzelner Ordinaten, von denen jede der Absterbeconstruction eines andern Geburtenzuwachses entnommen war; so lassen sich die Gesammtheiten der Verstorbenen durch Ordinatendifferenzen, die man summirt denkt, darstellen. Solche Differenzen sind für jedes Vorrücken des Alters um Δx in den drei hieher gehörigen Figuren construirt. In Fig. 2. sind alle die-

jenigen Differenzen summirt zu denken, welche zwischen $x=x'$ und $x=x''$ in jeder Absterbeconstruction für die Geburtenzuwächse von $t_0=t_0'$ bis $t_0=t_0''$ entstehen; die übrigen Differenzen sind daher nicht construirt. Man erhält dann die graphische Darstellung für die Gesammtheit ${}_{t_0'}^{t_0''}M_{t_0+x'}^{t_0+x''}$.

In Fig. 3. sind nur diejenigen Differenzen construirt, die von $t=t'$ bis $t=t''$ in den einzelnen Absterbeconstructionen für dieselben Geburtenzuwächse entstehen. Durch Summirung derselben erhält man die Gesammtheit ${}_{t_0'}^{t_0''}M_{t'}^{t''}$.

In Fig. 4. sind zur Abkürzung sogleich diejenigen unendlich kleinen Grössen erster Ordnung versinnlicht, durch deren Summirung die Gesammtheit ${}_{t-x''}^{t-x'}M_{t'}^{t''}$ entsteht.

Im nächsten Capitel wenden wir uns zu den Beziehungen zwischen den Gesammtheiten der Lebenden und denen der Verstorbenen. Um sie aufzufinden hat man zweierlei Wege: entweder kann man sofort von den zuletzt entwickelten Gleichungen 5, 6 und 7 ausgehen; oder von den Gleichungen 1, 2, 3 und 4, worin die Gesammtheiten der Lebenden dargestellt sind. Wir thun das letztere, weil dadurch mancher nicht hinreichend beachtete Vorgang ausführlicher behandelt werden kann.

Viertes Capitel.

Die Beziehungen zwischen den Gesammtheiten der Lebenden und der Verstorbenen.

Von den vier Gesammtheiten der Lebenden waren die beiden ersten abhängig vom Alter x, die beiden letzten von der Zeit t; x und t wurden bisher als constante Grössen angesehen. Es fragt sich nun, welche Veränderungen die Gesammtheiten erleiden, sobald in den beiden ersten das x, in den beiden letzten das t als veränderlich gedacht wird. Es wird sich zeigen, dass unter diesen Umständen alle vier Gesammtheiten sich wesentlich verschieden verhalten.

Wir beginnen mit derjenigen, welche die $x$jährig gewordenen aus der Geburtszeit t_0' bis t_0'' enthält. Durch Differenziren nach x (siehe Gleichung 1.) finden wir:

$${}_{t_0'}^{t_0''}V'(x)dx = dx.\,f'(x).\int_{t_0'}^{t_0''} F'(t_0)dt_0$$

d. h. der Zuwachs, den ${}_{t_0'}^{t_0''}V(x)$ erhält, wenn x um dx wächst, ist gleich der Zahl der im Alter x aus dieser Generation Sterbenden, jedoch von entgegengesetztem Vorzeichen (vergleiche die mit I(α) bezeichnete Grösse auf Seite 27). Die Gesammtheit der $x$jährigen, die aus einer festen Geburtszeit stammen, nimmt also ab, mit wachsendem x, um die Zahl der $x$jährig sterbenden.

Für den Zuwachs, den ${}_{t_0'}^{t_0''}V(x)$ erhält, wenn x von x' bis x'' fortschreitet, findet man also:

$$ {}_{t_0'}^{t_0''}V(x'') - {}_{t_0'}^{t_0''}V(x') = \int_{x'}^{x''} dx.f'(x)\int_{t_0'}^{t_0''} F'(t_0)dt_0 = -{}_{t_0'}^{t_0''}M_{t_0+x'}^{t_0+x''} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 8 $$

das heisst, der Zuwachs ist gleich der Gesammtheit der x' bis x'' jährig aus der Geburtszeit t_0' bis t_0'' verstorbenen (vergl. Gleichung 5.), aber von entgegengesetztem Vorzeichen. —

Nicht ganz so einfach verhält sich, bei wachsendem x, die Gesammtheit derjenigen, die von t' bis t'' in das Alter x eintreten; man erhält nämlich, wenn man ${}_{t'-x}^{t''-x}V(x)$ nach x differenzirt (mit Beachtung der von x abhängigen Grenzen):

$$ {}_{t'-x}^{t''-x}V'(x)dx = dx.\,f'(x)\int_{t'}^{t''} F'(t-x)dt + F'(t'-x).\,f(x)dx - F'(t''-x).\,f(x)dx $$

das heisst, wenn x wächst, so vermindert sich die Gesammtheit um die von t' bis t'' im Alter x sterbenden (vergl. die mit III(α) bezeichnete Grösse, die hier mit entgegengesetztem Vorzeichen erscheint); vermehrt sich um diejenigen, welche zur Zeit t' das Alter x erfüllen; und vermindert sich um die Zahl derer, die zur Zeit t'' das Alter x erreichen (denn die ersteren werden das Alter $x+dx$ nach der Zeit t', also innerhalb der Zeitstrecke t' bis t'' erreichen; die letztern hingegen erreichen das Alter $x+dx$ nach der Zeit t'', also nicht innerhalb der Strecke von t' bis t'').

Der Zuwachs, den die Gesammtheit erleidet, wenn x von x' bei x'' vorschreitet, ist also gleich:

$$ {}_{t'-x''}^{t''-x''}V(x'') - {}_{t'-x'}^{t''-x'}V(x') = \int_{x'}^{x''} dx f'(x)\int_{t'}^{t''} F'(t-x)\,dt + \int_{x'}^{x''} F'(t'-x).\,f(x)dx - \int_{x'}^{x''} F'(t''-x).\,f(x)dx $$

oder, wenn die Gleichungen 7. und 4. beachtet werden:

$$ = -{}_{t-x''}^{t-x'}M_{t'}^{t''} - \left\{ {}_{t''-x''}^{t''-x'}V(t'') - {}_{t'-x''}^{t'-x'}V(t') \right\} \quad \ldots\ldots \quad 9 $$

Das heisst: damit man aus denjenigen, die von t' bis t'' das Alter x' erreicht haben, die Zahl derer gewinne, die während derselben Zeitstrecke das Alter x'' erreicht haben, muss man von den x'jährig Gewordenen erstens die Zahl der x'' bis x'jährig Verstorbenen derselben Zeitstrecke subtrahiren; zweitens den Bestand der Altersclasse x'' bis x' zur Zeit t'' subtrahiren; und endlich den Bestand der Altersclasse x'' bis x' zur Zeit t' addiren.

Die Altersclasse der x'' bis x'jährigen zur Zeit t' muss addirt werden, weil ein Theil ihrer Mitglieder das Alter x'' während der Zeitstrecke t' bis t'' erreicht (der andre Theil ist schon unter den zu subtrahirenden Verstorbenen ent-

halten). Die Altersclasse der x'' bis x'jährigen zur Zeit t'' muss subtrahirt werden, weil sie aus demjenigen Theil der x'jährig gewordenen besteht, der sein Alter x'' nur ausserhalb der Zeitstrecke t' bis t'' erreichen kann (und der unter den Verstorbenen noch nicht enthalten ist). Auf diese Weise kann man mittelbar die Richtigkeit der Gleichung 9. einsehen, die ohne Anwendung der Analysis nur sehr unbequem entwickelt werden könnte. —

Die Gesammtheit ${}^{t_0''}_{t_0'}V(t)$ — sie begreift diejenigen in sich, welche aus der Geburtszeit t_0' bis t_0'' stammend, die Zeit t erreichen — erhält bei wachsendem t folgenden Zuwachs:

$$ {}^{t_0''}_{t_0'}V'(t)dt = dt.\int_{t_0'}^{t_0''} F'(t_0).\,f'(t-t_0)dt_0 $$

den man als die früher schon dagewesene, mit $\Pi(\gamma)$ bezeichnete Grösse erkennt. Der Zuwachs ist also gleich der Zahl derjenigen, die zur Zeit t aus jener Generation sterben, mit entgegengesetztem Vorzeichen genommen.

Der Zuwachs zu dieser Gesammtheit von t' bis t'' ist gleich:

$$ {}^{t_0''}_{t_0'}V(t'') - {}^{t_0''}_{t_0'}V(t') = \int_{t'}^{t''} dt \int_{t_0'}^{t_0''} F'(t_0) f'(t-t_0)dt_0 = -{}^{t_0''}_{t_0'}M_{t'}^{t''} \quad \ldots\ldots\ldots 10 $$

also gleich der Zahl der inzwischen Verstorbenen, negativ genommen (siehe Gleichung 6.). Der Satz ist ganz analog dem der Gleichung 8. und beinah eben so bekannt, häufig jedoch mit demselben irrthümlich verwechselt.

Die Gleichung 8. enthält nämlich Beziehungen zwischen den Gesammtheiten, die einer nach dem Alter absterbenden Generation entnommen sind; Gesammtheiten, auf deren Grösse die Geburtendichtigkeit keinen Einfluss ausübt. Die Gleichung 10. dagegen enthält Beziehungen zwischen den Gesammtheiten, die einer nach der Zeit sich vermindernden Generation entnommen sind. Solche Gesammtheiten sind aber nicht allein von der Absterbeordnung, sondern auch von der Geburtendichtigkeit abhängig.

Die Gleichung 8. wird für die Erforschung der Sterblichkeit sich anwendbar erweisen, die Gleichung 10. hingegen nicht. Die Analogie besteht nur in der äussern Erscheinung der beiden Gleichungen. —

Eine ähnliche Analogie finden wir durch Untersuchung der vierten Gesammtheit der Lebenden, die allein noch übrig ist:

Die Altersclasse der x'' bis x'jährigen zur Zeit t wächst, wenn t zunimmt, wie folgt:

$$ {}^{t-x'}_{t-x''}V'(t)dt = -dt\int_{x''}^{x'} F'(t-x)f'(x)dx - F'(t-x'').\,f(x'')dt + F'(t-x').\,f(x')dt $$

das heisst es treten aus: die zur Zeit t im Alter x'' bis x' sterbenden (vergl. die

mit III(γ) bezeichnete Grösse); sowie diejenigen, welche zur Zeit t das Alter x'' zu überschreiten im Begriffe sind; und es treten ein: die zur Zeit t erst x'jährig werdenden.

Also in dieser vierten Gesammtheit, ebenso wie in der zweiten, lassen sich die Zuwächse nicht bloss durch Verstorbene darstellen (was in der ersten und dritten Gesammtheit der Lebenden möglich war); sondern erst durch Verstorbene und Lebende zusammen.

Als Zuwachs, den die Altersclasse der x'' bis x'jährigen erhält, während t von t' bis t'' fortschreitet, findet man:

$$\underset{t''-x''}{\overset{t''-x'}{}} V(t'') - \underset{t'-x''}{\overset{t'-x'}{}} V(t') = -\int_{t'}^{t''} dt \int_{x''}^{x'} F'(t-x).f'(x).\, dx - \int_{t'}^{t''} F'(t-x'').f(x'').\, dt + \int_{t'}^{t''} F'(t-x').f(x').\, dt$$

woraus, durch Benützung der Gleichungen 7 und 2:

$$= - \underset{t-x''}{\overset{t-x'}{}} M_{t'}^{t''} - \left\{ \underset{t'-x''}{\overset{t''-x''}{}} V(x'') - \underset{t'-x'}{\overset{t''-x'}{}} V(x') \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \; 11$$

also eine Wiederherstellung der Gleichung 9. und so zu lesen: der Zuwachs, den die Altersclasse der x'' bis x' jährig zur Zeit t Lebenden erhält, während t von t' bis t'' fortschreitet, entsteht:

durch den Zugang aller von t' bis t'' das Alter x' erfüllenden; durch den Abgang derer, die von t' bis t'' das Alter x'' erfüllen; und durch den Abgang derer, die von t' bis t'' im Alter x'' bis x' sterben. Man sieht die Richtigkeit dieses Satzes ohne weiteres ein; er hätte zwar sogleich aus 9. abgeleitet werden können, aber es wäre dann der Vergleich zwischen den so wesentlich verschiedenen Differenzialgleichungen umgangen worden, aus denen 9. und 11. entstehen. —

Die Aenderungen, welche die Gesammtheiten der Lebenden bei wachsendem t und x erleiden, haben uns nun auf die Beziehungen zwischen Lebenden und Verstorbenen geführt, die wir noch einmal, geordnet nach den Gesammtheiten der Verstorbenen, zusammenstellen:

1) Die Gesammtheit der x' bis x'' jährig aus der Geburtszeit von t_0' bis t_0'' verstorbenen (Geichung 5.) ist gleich dem negativ genommenen Zuwachs, den die Gesammtheit der x jährig werdenden aus der Geburtszeit t_0' bis t_0'' erfährt, wenn x von x' bis x'' fortschreitet (Gleichung 8.).

2) Die Gesammtheit derjenigen, die von t' bis t'' sterben, stammend aus der Geburtszeit t_0' bis t_0'' (Gleichung 6.), ist gleich dem negativ genommenen Zuwachs, den die Gesammtheit derjenigen, die aus derselben Geburtszeit stammend, die Zeit t erreichen, erleidet, wenn t von t' bis t'' vorschreitet (Gleichung 10.).

3) Die Gesammtheit der von t' bis t'' im Alter x'' bis x' verstorbenen (Gleichung 7.) ist gleich: dem negativ genommenen Zuwachs, den die Gesammtheit der von t' bis t'' x jährig gewordenen erleidet, wenn sich x von x' bis

x'' vorwärts bewegt; plus dem negativ genommenen Zuwachs zur Gesammtheit derjenigen, die zur Zeit t in der Altersclasse der x'' bis x' jährigen standen, wenn t von t' bis t'' vorschreitet (Geichung 9. oder 11.).

Die beiden ersten Gesammtheiten von Verstorbenen lassen sich mit je einer Gesammtheit der Lebenden in Verbindung setzen; die dritte Gesammtheit von Verstorbenen lässt sich hingegen nur durch zweierlei Gesammtheiten von Lebenden darstellen; sie ist ihrer Natur nach weniger einfach, als die beiden andern. —

Der Zuwachs, den die erste Gesammtheit der Lebenden bei wachsendem x, und den die dritte Gesammtheit der Lebenden bei wachsendem t erhält, ist seiner Natur nach negativ, wie man sieht durch Vergleich dessen, was als Grundeigenschaft der Absterbeordnung, als ein Theil ihrer Definition, im ersten Capitel gesagt ist (nämlich, dass $f'(x) < 0$). Diese beiden Gesammtheiten können immer nur kleiner werden (siehe Diff. Gleichung vor 8. und 10.) wenn x, respective t wächst.

Ganz anders verhält sich die zweite und vierte Gesammtheit der Lebenden. Ob der Zuwachs, den sie erhalten, bei wachsendem x resp. bei wachsendem t grösser ist als Null, kleiner oder gleich Null, hängt mit ab von der Beschaffenheit der Geburtenfolge. Der Zuwachs wird z. B. in der vierten Gesammtheit (vergl. die Diff. Gleichung vor 11) positiv sein, wenn die x' jährig werdenden des Zeitpunctes t mehr sind, als die x'' bis x' jährig verstorbenen nebst den x'' jährig werdenden desselben Zeitpunctes t; ein Umstand, dessen Eintreten von den Werthen der Geburtendichtigkeit zwischen $t_0 = t - x''$ und $t_0 = t - x'$ abhängt. Aehnlich bei dem Zuwachs zur zweiten Gesammtheit (vergl. Diff. Gleichung vor Gleichung 9.).

Suchen wir nun die allgemeinsten Bedingungen auf, die für die Geburtenvertheilung bestehen müssen, damit der Zuwachs zur zweiten resp. zur vierten Gesammtheit gleich 0 werde.

Zuerst die zweite Gesammtheit; aus Gleichung 2. folgt, dass dann erfüllt sein müsste:

$$\left\{F(t''-x')-F(t'-x')\right\}.f(x') - \left\{F(t''-x'')-F(t'-x'')\right\}.f(x'') = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 12$$

Wenn man sich erinnert, dass $f(x'') < f(x')$ für jede Absterbeordnung, so sieht man, dass diese Bedingung nicht erfüllt sein kann, sobald die Menge der Gebornen von $t_0 = t' - x'$ bis $t_0 = t'' - x'$ gleich oder grösser ist, als die Geburtenmenge der eben so langen, früher liegenden Zeitstrecke von $t_0 = t' - x''$ bis $t_0 = t'' - x''$; dass vielmehr die Geburtenmenge der spätesten Zeitstrecke in einem bestimmten Verhältniss, das von der Absterbeordnung abhängt, kleiner sein muss, als die Geburtenmenge der früheren Zeitstrecke.

Ferner, damit der Zuwachs zur Altersklasse der x'' bis x' jährigen gleich

Null werde, hat man aus Gleichung 4. die Bedingung (die wir, um sie besser discutiren zu können, in etwas veränderter Form ausschreiben):

$$\int_{t_0=t'-x''}^{t_0=t'-x'} \left\{ F'(t_0+t''-t') - F'(t_0) \right\} f(t'-t_0)dt_0 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 13$$

Die Bedingung ist nicht erfüllbar, wenn die Differenz $F'(t_0+t''-t')-F'(t_0)$ für jeden Werth den t_0 durchläuft zwischen $t_0=t'-x''$ bis $t_0=t'-x'$ stets positiv ist oder stets negativ; das heisst, die Bedingung ist unerfüllbar, wenn von $t_0=t'-x''$ ab jeder um $t''-t'$ Einheiten spätere Zeitpunkt eine grössere (oder kleinere) Geburtendichtigkeit hat. Es müssen vielmehr sowohl positive als negative Werthe der Differenz mit einander abwechseln in einer Weise, die mit von der Absterbeordnung abhängt. Insbesondere kann aber die Bedingung auch erfüllt sein für jede Absterbeordnung, wenn an Zeitpunkten, welche um $t''-t'$ Einheiten auseinander liegen, dieselben Werthe der Geburtendichtigkeit sich wiederholen, wenn also $F'(t_0)$ eine periodische Function von t_0 ist. Wieder insbesondere wird der Fall dann eintreten, wenn $F'(t_0)$ während der entsprechenden Zeitstrecke ganz unabhängig von t_0 ist, das heisst, wenn die Geburtendichtigkeit constant ist.

Uebrigens gelten die besonderen Fälle der Bedingungen, die wir soeben entwickelt haben, damit der Zuwachs der zweiten resp. vierten Gesammtheit gleich Null werde, nur wenn in der That eine Absterbeordnung herrschend ist. Die Sätze, worin die besonderen Fälle ausgesprochen sind, haben also nicht die Allgemeinheit, die den andern Sätzen, wie wir später zeigen werden, zukommt. Wenn nämlich (Gleichung 12.) die von $t'-x''$ bis $t''-x''$ gebornen eine andre Absterbeordnung haben, als die von $t'-x'$ bis $t''-x'$ gebornen, so müsste man statt $f(x')$ schreiben etwa $\varphi(x')$; und anstatt $f(x'')$ wäre zu setzen $\psi(x'')$; ob nun $\psi(x'')<\varphi(x')$, kann man nicht wissen, wodurch der Grund wegfällt, worauf die Schlüsse gebaut waren, wann die Erfüllung der Gleichung 12. unmöglich sei.

Aehnlich kann die Form der Gleichung 13., aus welcher Form die besonderen Fälle entwickelt wurden, nicht bestehen, wenn die von $t''-x''$ bis $t''-x'$ gebornen eine Absterbeordnung $\varphi(x)$ haben, und die von $t'-x''$ bis $t'-x'$ gebornen eine Absterbeordnung $\psi(x)$. —

Nur das steht ganz allgemein fest, dass bei einer gewissen Beschaffenheit der Geburtenvertheilung die Zahl derjenigen, die von t' bis t'' im Alter x' eintreten, ebenso gross sein kann, als die Zahl derer, die ins Alter x'' eintreten; und dass bei einer gewissen andern Beschaffenheit der Geburtenvertheilung die Zahl derer, die zur Zeit t' im Alter x'' bis x' stehen, ebenso gross sein kann, als die Zahl der zur Zeit t'' in dieser Altersclasse befindlichen.

Es ist ferner unmöglich, dass sowohl das eine als auch das andre geschehe; es ist unmöglich, wenn man unter t', t'', x'', x' im einen Falle dieselben Grössen versteht, wie im andern Falle, dass sowohl der Zuwachs zur einen

Gesammtheit, als auch der Zuwachs zur andern Gesammtheit gleich Null werde. Der Beweis dieser Unmöglichkeit liegt in der Gleichung 9. oder 11., die für jede Geburtenvertheilung gilt. Denn diese Gleichung sagt aus, dass der negativ genommene Zuwachs zur einen Gesammtheit plus dem negativ genommenen Zuwachs der andern Gesammtheit gleich sei der Zahl derjenigen, die zwischen dem Alter x'' und x' von der Zeit t' bis t'' sterben; also gleich sei einer Grösse, die niemals gleich Null werden kann, weil ja bei stätiger Geburtenvertheilung und Absterbeordnung das Sterben niemals unterbrochen sein kann. Folglich kann nicht sowohl der eine als auch der andre Zuwachs gleich Null sein.

Die Gleichung 9. oder 11. sagt ferner aus, dass die Summe der beiden negativ genommenen Zuwächse für jede Geburtenvertheilung und für jede Absterbeordnung einen positiven Werth hat. Wenn also der eine negativ genommene Zuwachs kleiner als Null ist, so muss der andre negativ genommene Zuwachs grösser als Null sein und zwar so gross, dass auch die Summe der beiden grösser als Null ist. —

Die Gleichungen 8., 10. und 9. oder 11., in welchen der Zusammenhang gezeigt wird, den jede der drei Gesammtheiten von Verstorbenen mit den Gesammtheiten der Lebenden hat, können benutzt werden, um noch deutlicher als bisher die wesentliche Verschiedenheit der drei Gesammtheiten von Verstorbenen untereinander graphisch darzustellen. Und zwar in folgender abgekürzten Weise:

Während wir in Fig. 1. gezeigt haben, wie die (unendlich klein zu denkenden) Ordinaten, aus deren Summe die Gesammtheiten der Lebenden entstehen, zugleich ihrer Grösse und ihrer Lage nach dargestellt werden können, verzichten wir von jetzt an auf die Darstellung der Grösse, weil dazu die umständliche Construction des Absterbens jedes einzelnen Geburtszuwachses erforderlich ist; und beschränken uns darauf, nur die Lage zu versinnlichen, wodurch die wesentliche Verschiedenheit der Gesammtheiten der Lebenden hinreichend hervorleuchtet.

Denn es ist schon bemerkt worden, dass die unendlich kleinen Ordinaten, aus deren Summe eine Gesammtheit von gleichaltrigen Lebenden entsteht, alle an einer krummen Linie liegen, welche man erhält durch Construction der Curve der Gebornen für einen um x weiter vorwärts liegenden Anfangspunkt der Abscissen der Zeit; hingegen die unendlich kleinen Ordinaten, aus denen eine Gesammtheit von gleichzeitig Lebenden entsteht, liegen alle auf einer geraden Linie, die man senkrecht auf der Abscissenaxe der Zeit in der Entfernung t vom Anfangspunct errichtet.

Auf diese Weise hat man in Fig. 5. und 6. durch die punctirten Linien AB und CD die Lage und dadurch das Wesen derjenigen zwei Gesammtheiten von Lebenden versinnlicht, auf welche man (nach Gleichung 8.) die Gesammtheit der x' bis x''jährig verstorbenen aus der Generation t_0' bis t_0'' zurückführen kann; in Fig. 7. und 8. die Lage derjenigen zwei Gesammtheiten von Lebenden

(durch die Linien AB und CD), auf welche (nach Gleichung 10.) die Gesammtheit der von t' bis t'' aus der Generation t_0' bis t_0'' verstorbenen zurückgeführt ist;

in Fig. 9. und 10., durch die Linien AB und CD, AC und BD die Lage derjenigen vier Gesammtheiten von Lebenden, auf welche (in Gleichung 9. oder 11.) die Gesammtheit der von t' bis t'' im Alter x'' bis x' verstorbenen zurückgeführt ist.

Vergleicht man nun die drei Figurengruppen unter einander, so zeigt sich die wesentliche Verschiedenheit der drei Gesammtheiten von Verstorbenen sehr deutlich dadurch, dass eine jede von ihnen in ganz andrer Weise auf Gesammtheiten von Lebenden zurückführbar ist. So gewinnt das Auge auf einen Blick eine Anschauung des Inhalts der Gleichungen 8., 10. und 9. oder 11.

Bei einiger Uebung kann man, durch Darstellung der Gesammtheiten der Lebenden blos ihrer Lage nach, sogar die Sätze vom Wachsthum dieser Gesammtheiten bei wachsendem x oder t ableiten, ohne von der Analysis Gebrauch zu machen. Man erkennt ferner aus den drei Figurengruppen ganz unmittelbar, was im vorigen Capitel über τ' und τ'', ξ' und ξ'', τ_0' und τ_0'' gesagt ist. —

Der Zusammenhang zwischen den Gesammtheiten der Lebenden und Verstorbenen, wie er in den Gleichungen 8., 10., 9. oder 11. dargestellt ist, wird besonders wichtig wegen der Gesammtheiten der gleichaltrigen Lebenden (Gleichung 1. und 2.). Die Gesammtheiten können nämlich, wie schon erwähnt, von der Bevölkerungsstatistik nicht aus Aufzeichnungen über Lebende nachgewiesen werden, weil derartige Aufzeichnungen über das Erleben der verschiedenen Altersstufen, wie man sie brauchte, nicht stattfinden. Wohl aber finden überall hinreichende Aufzeichnungen über Sterbefälle statt, sodass alle Gesammtheiten von Verstorbenen auch praktisch nachweisbar sind; und zwei von den Gesammtheiten der Verstorbenen hängen mit den praktisch nicht ohne weiteres nachweisbaren Gesammtheiten von Lebenden zusammen. Man wird also die Gesammtheiten der Verstorbenen benutzen können, um daraus mittelbar jene Gesammtheiten von Lebenden so darzustellen, dass sie auch praktisch nachweisbar werden; und zwar, ohne dass eine besondere Beschaffenheit der Geburtenvertheilung und Absterbeordnung vorausgesetzt werden müsste.

Nur die beiden Gleichungen 8. und 9. oder 11. sind zu diesem Zwecke brauchbar, nicht aber die Gleichung 10., denn in ihr kommt keine Gesammtheit von Gleichaltrigen vor. Also nur die aus einer bestimmten Generation zwischen zwei Altersgrenzen verstorbenen und die in einer bestimmten Zeitstrecke zwischen zwei Altersgrenzen verstorbenen können hier verwendet werden, nicht aber die aus einer bestimmten Generation zwischen zwei Zeitpuncten verstorbenen. In diesem Sinne nennen wir die letztere in Preussen nachgewiesene Gesammtheit der Verstorbenen die unwichtigste von den dreien. —

Um mit der Gleichung 8. zu beginnen, so bietet sie uns zweierlei Wege dar.

Wenn man sich nämlich erinnert, dass ${}_{t_0'}^{t_0''}V(\omega) = 0$, so folgt aus 8., sobald man setzt: $x'' = \omega$ und $x' = x$:

$$ {}_{t_0'}^{t_0''}V(x) = {}_{t_0'}^{t_0''}M_{t_0+x}^{t_0+\omega} \quad \ldots \quad 8\,a. $$

das heisst die Gesammtheit der aus einer bestimmten Generation das Alter x erfüllenden ist gleich der Gesammtheit aller aus derselben Generation vom Alter x bis ω versterbenden. Dieser Satz ist ebenso bekannt als unpraktisch; denn die Verstorbenen, auf die man verwiesen wird, liegen in der Zeit von $t_0 = t_0' + x$ bis $t = t_0'' + \omega$, in einer Zeitstrecke also von der Dauer $(t_0'' - t_0') + (\omega - x)$, einer Zeitstrecke, die um so länger ist, je kleiner man x wählt deren Ende etwa 100 Jahre später liegt, als das Ende der Geburtszeit. Vor allem aber ist ω keine feste Grösse.

Der andere Weg ist viel zweckmässiger; da man hat ${}_{t_0'}^{t_0''}V(0) = F(t_0'') - F(t_0')$, so folgt aus Gleichung 8., nachdem $x' = 0$ und $x'' = x$ gesetzt ist:

$$ {}_{t_0'}^{t_0''}V(x) = \left\{F(t_0'') - F(t_0')\right\} - {}_{t_0'}^{t_0''}M_{t_0+0}^{t_0+x} \quad \ldots \quad 8\,b. $$

das heisst die Zahl der aus einer Generation das Alter x erfüllenden findet man, wenn man von den überhaupt Gebornen die Zahl derjenigen subtrahirt, welche zwischen dem Alter 0 und x aus der Generation sterben. Da man Geburtsregister führt, so ist die Zahl der von t_0' bis t_0'' Gebornen zu finden; und die Sterberegister kommen für die Zeit $t = t_0'$ bis $t = t_0'' + x$ in Anwendung, deren Dauer $= t_0'' - t_0' + x$ Zeiteinheiten ist: also um so kleiner, je kleiner x. Es herrscht dabei keine Unbestimmtheit, wie beim ersten Weg durch die Unbestimmtheit der Grösse ω. Auch dieser Weg ist, wie der vorige, ganz allgemein bekannt und oftmals empfohlen. Aber einstweilen ist auch die Gleichung 8 *b.* nur selten anwendbar: denn die erforderliche Gesammtheit der Verstorbenen pflegt nirgends wirklich nachgewiesen zu werden aus dem oben erwähnten nebensächlichen Grunde. —

Die Gleichung 9. oder 11. bietet gleichfalls zweierlei Möglichkeiten eine Gesammtheit von x jährigen wirklich nachweisbar zu machen. Für $x'' = \omega$ und $x' = x$ hat man nämlich:

$$ {}_{t'-x}^{t''-x}V(x) = {}_{t-\omega}^{t-x}M_{t'}^{t''} + {}_{t''-\omega}^{t''-x}V(t'') - {}_{t'-\omega}^{t'-x}V(t') \quad \ldots \quad 9\,a. $$

das heisst man erhält die Gesammtheit der von t' bis t'' das Alter x erfüllenden, (oder die Gesammtheit derjenigen, die aus der Geburtszeit $t_0 = t' - x$ bis $t_0 = t'' - x$ das Alter x erfüllen) wenn man zu den ω bis x jährig von t' bis t'' verstorbenen die Gesammtheit derjenigen addirt, die zur Zeit t'' im Alter ω bis x standen, und die Gesammtheit derjenigen subtrahirt, die zur Zeit t' im Alter ω bis x standen.

Setzt man hingegen in Gleichung 9. oder 11. $x' = 0$ und $x'' = x$, so erscheint folgende Gleichung:

$$ {}^{t''-x}_{t'-x}V(x) = \left\{F(t'') - F(t')\right\} - {}^{t-0}_{t-x}M^{t''}_{t'} - {}^{t''-0}_{t''-x}V(t'') + {}^{t'-0}_{t'-x}V(t') \quad . \quad . \quad . \quad 9\,b. $$

das heisst die aus der Geburtszeit von $t_0 = t'-x$ bis $t_0 = t''-x$ stammenden, welche das Alter x erfüllen, findet man, wenn man von den Gebornen der Zeit $t_0 = t'$ bis $t_0 = t''$ subtrahirt: die Zahl der von t' bis t'' im Alter x bis 0 Verstorbenen; ferner subtrahirt: die Zahl der zur Zeit t'' im Alter x bis 0 stehenden; hingegen addirt: die Zahl der zur Zeit t' im Alter x bis 0 stehenden.

Die beiden Gleichungen 9 *a.* und 9 *b.*, von denen ich nicht weiss, ob sie schon entwickelt sind, scheinen sehr zweckmässig zu sein: sie erfordern nur die Registerführung über Geborne und Gestorbene, während einer Zeitdauer, die gerade so lang ist, als die Geburtszeit, aus der die Generation stammt, die man bis zum Alter x verfolgen will; und ausserdem geben die Volkszählungen nach Altersclassen die sonst noch nöthigen Aufzeichnungen.

Da die Volkszählungen, aus denen wir den Bestand der Altersclassen erfahren, zu bestimmten Zeiten stattfinden und auch über die Altersstufen, nach denen erhoben wird, die Verfügung nicht mehr frei ist (für schon vergangene Zählungen), so müsste man sich danach einrichten. Gesetzt z. B., die Zählungen am 3. Decbr. 1861 und 3. Decbr. 1864 erlaubten die Gesammtheit der über 10 jährigen zu ermitteln, so würde mit Hilfe der Sterberegister vom 3. Decbr. 1861 bis 2. Decbr. 1864 herstellbar sein nach Gleichung 9 *a*: die Gesammtheit derjenigen, die, geboren vom 3. Decbr. 1851 bis 2. Decbr. 1854, das Alter von 10 Jahren erfüllt haben.

Mit Hilfe derselben Sterberegister und der Geburtsregister aus derselben Zeitstrecke wäre ferner nach Gleichung 9 *b.* dieselbe Gesammtheit auf andre Weise nachweisbar. Und wenn die Geburtsregister vom 3. Decbr. 1851 bis 2. Decbr. 1854 zugänglich wären, so könnte auf diese Weise der Werth $f(10)$ der Absterbeordnung ermittelt werden, so gut als es ohne Abschluss des Gebietes gegen die Wanderung überhaupt möglich ist.

Es würde sich die Methode der Gleichung 9 *a.* und 9 *b.* um so mehr empfehlen, als die dadurch erforderliche Gesammtheit von Verstorbenen in der That gewöhnlich nachgewiesen wird, z. B. in Sachsen und Bayern und früher in Preussen, und der Umstand, dass man die Register für das ganze Kalenderjahr und nicht jedesmal für den Anfang des 3. Decbr. abschliesst, dürfte vielleicht vernachlässigt werden.

Gleichwohl sind auch die Methoden der Gleichung 9 *a.* und 9 *b.* ziemlich unpractisch, weil die Volkszählungsresultate bedeutend unter dem Einfluss der Wanderung stehen; und zweitens, weil die Scheidung in Altersclassen ganz und gar unsichere Resultate bietet. Theils wissen die Leute nicht, wie alt sie sind, theils sagen sie es nicht genau, sondern nur annähernd. Also aus wirklich bestehenden Schwierigkeiten das erforderliche Material zuverlässig zu er-

halten, scheinen mir diese beiden zuletzt entwickelten Methoden fast unbrauchbar zu sein, abgesehen davon, dass sie das Herrschen einer einzigen Absterbeordnung voraussetzen (ähnlich wie Seite 38). —

Wenn wir nun wiederholen, inwiefern die bisher behandelten Gesammtheiten zur Erforschung der Absterbeordnung dienen können, so finden wir folgendes:

Die Zahl derjenigen, die aus einer Einheit Geborner vom Alter x' bis x'' sterben, das heisst die Grösse $f(x')—f(x'')$, kann (ohne irgend eine Voraussetzung über die besondere Natur der Geburtendichtigkeit und der Absterbeordnung) gefunden werden, sobald man die Gesammtheit der aus einer festen Geburtszeit stammenden, die in dem Alter x' bis x'' gestorben sind, und die Zahl der in jener Geburtszeit gebornen kennt. Soweit ist der Satz ziemlich allgemein bekannt. Die erforderliche Gesammtheit von Verstorbenen (siehe Gleichung 5.) wird aber bis jetzt, soviel ich weiss, nirgends nachgewiesen, weil sie meistens mit andern, der Praxis bequemeren Gesammtheiten von Verstorbenen verwechselt werden mag. Wir werden in einem späteren Capitel untersuchen, wie sich die berechtigten Interessen der Praxis mit den Forderungen der Theorie vereinigen lassen. Gänzlich unbrauchbar, so lange man sich jeder Aussage über Geburtendichtigkeit und Beschaffenheit der Absterbeordnung enthält, sind die beiden andern Gesammtheiten der Verstorbenen: die aus einer bestimmten Geburtszeit stammenden, die zwischen zwei Zeitpunkten sterben (nachgewiesen in Preussen, vergl. Gleichung 6.); und die zwischen zwei Zeitpunkten im Alter x'' bis x' Verstorbenen (nachgewiesen in Sachsen und Bayern; vergl. Gleichung 7.); sie können nicht zur directen Erforschung der Grösse $f(x')—f(x'')$ verhelfen.

Die Zahl derer, die aus einer Einheit von Gebornen das Alter x erfüllen, — wir bezeichneten sie durch $f(x)$ — ist ohne weitere Voraussetzung herstellbar aus einer der beiden Gesammtheiten der Gleichaltrigen (Gleichung 1. und 2., die für diesen Zweck keine Verschiedenheit zeigen) sobald man die Zahl der Gebornen kennt, aus denen die Gesammtheit der Gleichaltrigen herrührt. Aber die Gesammtheiten können — weil es keine Aufzeichnungen über das Erleben eines Alters giebt — nur mittelbar nachgewiesen werden. Und zwar erstens durch eine Gesammtheit der Verstorbenen (Gleichung 8 *a.* und 8 *b.*), die man nachweisen könnte, aber nicht nachweist; zweitens durch eine andre Gesammtheit von Verstorbenen (Gleichung 9 *a.* und 9 *b.*), die jedoch noch anderes, höchst unverlässiges Material (aus Volkszählungslisten) erfordert. Die Gesammtheiten der gleichzeitig Lebenden (Gleichung 3. und 4.) sind ganz unbrauchbar zur Erforschung der Grösse $f(x)$ solange man sich, wie immer in diesem ersten Theil, der besondere Voraussetzungen enthält.

Es bleibt also, als das einzige Mittel, um $f(x')—f(x'')$ direct zu berechnen, nichts übrig, als dass man die Zahl der im Alter x' bis x'' Verstorbenen, die von t_0' bis t_0'' geboren waren, wirklich, wie es bisher nicht geschehen ist, auszieht.

Dieselben Auszüge sind zur Berechnung der Grösse $f(x)$ zwar nicht das einzige, aber doch das einzig sichere Mittel, weil man stets das Material, das aus laufenden Aufzeichnungen über Lebende und Sterbende entsteht, dem Material einmaliger Erhebungen vorziehen muss, die man nach 9. *a* und 9 *b*. mit zu Hilfe nehmen müsste.

Es bedarf keiner Erwähnung, dass unter Auffindung des Werthes $f(x')—f(x'')$ oben immer nur eine solche verstanden wird, welche nicht das Bekanntsein sowohl der Grösse $f(x')$ als auch der Grösse $f(x'')$ voraussetzt; sondern nur eine solche, die sofort zur Kenntniss des Werthes der Differenz führt, ohne dass Minuend und Subtrahend bekannt sind. Dass die Methoden, durch welche man $f(x)$ findet, zugleich auch Methoden sind, um $f(x')—f(x'')$ zu finden, versteht sich nämlich von selbst, aber es wird nur zu häufig übersehen, dass man $f(x')—f(x'')$ auch unabhängig von $f(x)$ finden kann und desshalb wurden die dazu führenden Methoden im obigen vorangestellt. —

Was die Auslegung der Grössen $f(x')—f(x'')$ resp. der Grösse $f(x)$, nachdem man sie irgendwie gefunden hat, betrifft; so dürfen wir nicht sagen, sie seien der Absterbeordnung entnommen, welche für jene Geborne u. s. w. geherrscht habe. Eine Absterbeordnung ist nur dann herrschend, wenn die kleinsten Zuwächse von Gebornen ihr schon unterliegen. Das ist bekanntlich nicht einmal für ein Individuum der Fall, denn man stirbt nicht nach und nach. Man muss vielmehr so auslegen: die gefundenen Werthe von $f(x)$ und $f(x')—f(x'')$ gehören derjenigen Absterbeordnung an, aus welcher sich, wenn sie geherrscht hätte, die beobachtete Verminderung u. s. w. erklären liesse. Das Herrschen einer Absterbeordnung ist eine verabredete, willkürliche Anschauung, deren man sich bedient, um das Absterben messen zu können. Bei allen Untersuchungen über Sterblichkeit frage man immer nur nach derjenigen Absterbeordnung, aus der, wenn sie geherrscht hätte, die beobachteten Grössen sich erklären lassen: so wird dadurch in der analytischen Darstellung der Gesammtheiten die Annahme einer herrschenden Absterbeordnung gerechtfertigt — soweit die analytische Darstellung den Zweck hat zu zeigen, wie man $f(x')—f(x'')$ und $f(x)$ findet.

Aber die analytische Darstellung hat in diesem und den vorigen Capiteln auch gedient, um allgemeine Sätze z. B. die Beziehungen zwischen den Gesammtheiten der Lebenden und der Verstorbenen zu finden. Kommt nicht die Allgemeinheit dieser Sätze in Gefahr dadurch, dass wir überhaupt das Herrschen einer Absterbeordnung, und zwar das Herrschen einer einzigen, vorausgesetzt haben? Bei einigen Sätzen allerdings, und es ist da besonders erwähnt worden; aber die hauptsächlichen Sätze, die in den Gleichungen 8., 10. und die 9. oder 11. enthalten sind, gelten, vermöge der begebenen Auslegung, ganz allgemein. Der Grund leuchtet ein aus folgender Gegenüberstellung:

Wenn ich die Gleichung 11. so auslege: der Zuwachs, den die Altersclasse der x'' bis x' jährigen erhält, während t von t' bis t'' fortschreitet, entsteht, in-

dem man den Geburtenzuwachs $dt.F'(t-x)$ multiplicirt mit $f'(x)dx$, das heisst mit dem Zuwachs, den die x jährigen der herrschenden Absterbeordnung bei fortschreitendem x erhalten; indem man dies Product für alle Werthe von $x=x''$ bis $x=x'$ bildet; und diese Producte summirt; indem man alle diese Summen für die Werthe von $t=t'$ bis $t=t''$ bildet, diese Summen summirt und dem Resultat das negative Zeichen vorsetzt u. s. w. — so gilt eine solche Auslegung nur da, wo eine einzige Absterbeordnung herrscht; also nicht in der Wirklichkeit. Wenn ich aber auslege: jener Zuwachs entsteht durch den Zugang aller die von t' bis t'' das Alter x' erfüllen; durch den Abgang aller die von t' bis t'' das Alter x'' erfüllen; und durch den Abgang aller derer, die von t' bis t'' im Alter x'' bis x' sterben; wenn ich also auslege, wie oben ausgelegt ist: dann gilt der Satz auch da, wo, wie in der Wirklichkeit, keine Absterbeordnung herrscht.

Die erste Auslegung behält nämlich die besondern Vorstellungen über die Art und Weise der Verminderung einer Anzahl von Gebornen im Laufe des Alters bei, deren wir bedürfen, um die Gesammtheiten der Lebenden und Verstorbenen analytisch darzustellen; sie behält die Vorstellung bei, dass die Zahl derjenigen, die von den Gebornen der Zeit t_0 das Alter x erreichen, für jeden Werth von t_0 entstehe durch Anfügung eines und desselben von x abhängigen Factors $f(x)$ an die jedesmalige Zahl der Gebornen $dt_0 . F'(t_0)$. Durch das Festhalten an dieser willkürlichen Vorstellung wird die erste Auslegung unanwendbar für die Wirklichkeit.

Aber die zweite Auslegung erinnert sich, dass die besondern Vorstellungen über die Art und Weise der Verminderung nur dazu dienten, um die Analysis einzuführen. Sie verwendet dieselben auch, um die Bedeutung der einzelnen Integrale zu erkennen; sobald aber die Bedeutung erkannt ist, werden dann die besonderen Vorstellungen wieder abgestreift und nur der allgemeine Sinn beibehalten. Wo diese Auslegung z. B. das Product aus $F(t''-x')-F(t'-x')$ und $f(x')$ findet, sagt sie: als ein solches Product erscheint die Gesammtheit derer, die von t' bis t'' das Alter x' erfüllen, dann, wenn eine Absterbeordnung herrscht. Die Form des Productes, in der die Gesammtheit erscheint, ist etwas zufällig dadurch herbeigeführtes, dass man eine Absterbeordnung annahm; ich werde also diese besondere Vorstellung wieder los, wenn ich in der Auslegung die Form des Productes nicht mehr erwähne; und indem also in der Auslegung nicht mehr erwähnt wird, als welche Verbindungen von $F(t_0)$ und $f(x)$ die verschiedenen Gesammtheiten erschienen waren, befreit man sich wieder von den besonderen Vorstellungen und gewinnt allgemein gültige Sätze.

Hierdurch scheint uns nachgewiesen, dass man trotz der besondern Hypothesen, worauf die allgemeine Darstellung der Gesammtheiten beruht, durch entsprechende Auslegung dennoch allgemein gültige Sätze gewinnen kann.

Die Darstellung dient also gleich gut zu beiden Zwecken, zu deren Erreichung sie eingeführt wurde: sie verräth die Brauchbarkeit der verschiedenen Gesammtheiten für Untersuchung der Sterblichkeit; und sie lässt die allgemeinsten

Sätze über die Gesammtheiten finden: Sätze von solcher Allgemeinheit, dass sie Geltung haben, wo nur immer fortwährend Geburten und Sterbefälle vorkommen. Zugleich hat man bei dieser Darstellung den Vortheil, dass man nicht auf einen zufälligen guten Einfall zu warten braucht, um allgemeine Sätze über die verschiedenen Gesammtheiten zu gewinnen; sie entwickeln sich vielmehr gleichsam von selbst bei Anwendung der Grundbegriffe des Differenzirens und Integrirens und können also mit Leichtigkeit beliebig vermehrt werden.

Fünftes Capitel.

Das summirte Alter und die verlebte Zeit.

Wenn sich die Untersuchungen der Statistiker über die Sterblichkeit begnügt hätten, nur nach den Grössen $f(x)$ und $f(x')-f(x'')$, das heisst nach den Ordinaten der Absterbecurve und nach den Differenzen derselben zu fragen, so könnten wir bei den bisher entwickelten Sätzen stehen bleiben. Aber man findet in der Sterblichkeitslehre Streitfragen, die wir im zweiten Theil der Abhandlung berühren müssen, über die Bedeutung von gewissen Quotienten, welche alle als „durchschnittliches Alter" (dieser oder jener Lebenden oder Gestorbenen) bezeichnet werden können und von denen gewöhnlich nach dem Zusammenhang gefragt wird, der sie mit gewissen aus der Absterbeordnung abgeleiteten Begriffen, die wir sogleich besprechen werden, verbindet. Die Streitfragen sind unlösbar und ungelöst; die Irrlehren sind zwar meistens verdienter Massen verworfen, aber nicht eigentlich widerlegt, und können es nicht werden, ehe man die nöthigen allgemeinen Sätze herstellt über das, was wir das summirte Alter der Bestandtheile einer Gesammtheit, oder abgekürzt das summirte Alter einer Gesammtheit nennen wollen. Dabei sind übrigens diese allgemeinen Sätze von eigenem, selbständigem Interesse und es wird sich ausserdem an ihnen zeigen, dass die bisher angewendete Methode gar keine Schwierigkeiten in diesem Gebiete fortbestehen lässt, dass sie zwar weitläufig bei einfachen Fragen, aber desto bündiger bei verwickelten ist. —

Die aus der Absterbeordnung abgeleiteten, noch nicht besprochenen Grössen sind folgende: erstens das summirte Alter derjenigen, die aus einer Einheit Geborner das Alter x erreichen; jeder derselben ist x Jahre alt; ihre Anzahl ist $f(x)$; also ihr summirtes Alter gleich $x . f(x)$. Zweitens das summirte Alter derjenigen, die aus einer Einheit Geborner im Alter x sterben; es ist $-x . f'(x) . dx$, eine unendlich kleine Grösse. Das summirte Alter derjenigen, die vom Alter x' bis x'' sterben, ist eine endliche Grösse, die durch Integration

von x' bis x'' aus der vorhergehenden abgeleitet wird, und für welche folgende Gleichung besteht:

$$-\int_{x'}^{x''} x f'(x) dx = x' . f(x') - x'' . f(x'') + \int_{x'}^{x''} f(x) dx$$

die man auf dem Wege der Integration durch Theilung gewinnt. Der Sinn ist folgender: Das summirte Alter der im Alter x' bis x'' Verstorbenen aus einer Einheit Geborner ist gleich dem summirten Alter der x' jährig gewordenen; minus dem summirten Alter der x'' jährig gewordenen; plus einer bisher noch nicht vorgekommenen Grösse $\int_{x'}^{x''} f(x) dx$. Die neue Grösse ist die Summe der Producte, die entstehen, wenn man die Zahl der x jährigen multiplicirt mit der Grösse dx, um die das Alter zu wachsen im Begriffe ist; und zwar der Producte für alle Werthe von $x = x'$ bis $x = x''$. Wir nennen diese Grösse: die Zeit verlebt von den x jährigen aus einer Einheit Geborner, vom Alter x' bis x''. Um also auf das summirte Alter der von x' bis x'' verstorbenen zurückzukommen, so ist es gleich dem summirten Alter der x' jährig werdenden, minus dem der x'' jährig werdenden plus der Zeit verlebt von den x jährig werdenden von x' bis x'' — wobei überall „aus einer Einheit von Gebornen" hinzugefügt werden muss. —

Wenden wir uns nun zu den Gesammtheiten der Lebenden und Verstorbenen, die einem Gebiet mit stätiger Geburtenvertheilung entnommen sind. Man erhält das, was wir summirtes Alter der Bestandtheile einer Gesammtheit nennen, wenn man die unendlich kleine Grösse erster Ordnung (resp. zweiter Ordnung bei den Verstorbenen), aus der die Gesammtheit abgeleitet wurde, durch x resp. $(t - t_0)$ multiplicirt und dann zwischen denselben Grenzen integrirt wie man zur Darstellung der Gesammtheit that. Dann entsteht für jede Gesammtheit die Summe der Producte aus jedem vorkommenden Alter in die Zahl derer, die es erreichen, und diese Summe nennen wir kurz das summirte Alter der Gesammtheit.

Da die Integrationsgrenzen dieselben sind, wie bei Darstellung der Gesammtheit, so brauchen wir nach einer folgerichtigen symbolischen Bezeichnung des summirten Alters nicht lange zu suchen: während V und M die Gesammtheiten von Lebenden resp. Verstorbenen bedeuten, nehmen wir AV und AM als Symbol für das summirte Alter der Gesammtheiten von Lebenden resp. Verstorbenen und bezeichnen durch dieselben Indices wie früher, welche von den Gesammtheiten gemeint sei.

Von der Richtung der Integration gilt ganz das früher gesagte: das summirte Alter der Lebenden ist positiv, wenn nach steigender Geburtszeit summirt wird; das summirte Alter der Verstorbenen ist positiv, wenn sowohl nach steigender Geburtszeit, als nach steigender Sterbezeit summirt wird. —

Um bei den Lebenden zu beginnen, so erhält man vier Gleichungen, analog den Gleichungen 1. 2., 3. und 4., und zwar:

$$x.\, f(x)\int_{t_0'}^{t_0''} dt_0.\; F'(t_0) = \left\{F(t_0'')-F(t_0')\right\}.\; x.\, f(x) \qquad = {}_{t_0'}^{t_0''}A\,V(x) \;.\;.\;.\;.\; 15$$

das summirte Alter der aus einer Generation x jährig werdenden. Es ist gleich dem Product von $x.\, f(x)$ in die Zahl der von t_0' bis t_0'' gebornen (deren Vertheilung innerhalb dieser Geburtszeit gleichgültig ist); die Grösse $x.\, f(x)$ kann also hieraus leicht gefunden werden. Ferner:

$$x.\, f(x)\int_{t_0 = t'-x}^{t_0 = t''-x} dt_0.\; F'(t_0) = \left\{F(t''-x)-F(t'-x)\right\}.\; x.\, f(x) \qquad = {}_{t'-x}^{t''-x}A\,V(x) \;.\;.\;.\; 16$$

das summirte Alter derjenigen, die von t' bis t'' das Alter x erfüllen; nur wenn x veränderlich, besteht ein wesentlicher Unterschied vom summirten Alter der vorigen Gesammtheit. Ferner:

$$\int_{t_0'}^{t_0''} dt_0.\; F'(t_0).\; (t-t_0).\, f(t-t_0) \qquad = {}_{t_0'}^{t_0''}A\,V(t) \;.\;.\;.\;.\; 17$$

das summirte Alter derjenigen, die aus der Geburtszeit t_0' bis t_0'' stammend, die Zeit t erreichen; es ist abhängig von der Geburtendichtigkeit; die Integration ist nicht ausführbar. Endlich:

$$\int_{t_0 = t-x''}^{t_0 = t-x'} dt_0.\; F'(t_0).\; (t-t_0).\, f(t-t_0) \qquad = {}_{t-x''}^{t-x'}A\,V(t) \;.\;.\;.\; 18$$

vom summirten Alter der vorigen Gesammtheit erst dann wesentlich verschieden, wenn t veränderlich. —

Hieran reihen sich drei Gleichungen über das summirte Alter der drei Gesammtheiten von Verstorbenen (entsprechend den Gleichungen 5., 6. und 7.) und zwar zuerst:

Das summirte Alter der x' bis x'' jährig verstorbenen, die aus der Geburtszeit t_0' bis t_0'' stammen:

$$-\int_{t_0'}^{t_0''} dt_0.\; F'(t_0)\int_{x'}^{x''} x.\, f'(x)dx = -\int_{t_0'}^{t_0''} dt_0.\; F'(t_0)\int_{t = t_0+x'}^{t = t_0+x''} (t-t_0).\, f'(t-t_0)dt \quad = {}_{t_0'}^{t_0''}AM_{t_0+x'}^{t_0+x''} \;.\;.\; 19$$

Ferner das summirte Alter der von t' bis t'' verstorbenen, die aus der Geburtszeit t_0' bis t_0'' stammen:

$$-\int_{t_0'}^{t_0''} dt_0.\; F'(t_0)\int_{t'}^{t''} (t-t_0).\, f'(t-t_0)dt \qquad = {}_{t_0'}^{t_0''}AM_{t'}^{t''} \;.\;.\;.\; 20$$

Endlich das summirte Alter derjenigen, die im Alter x'' bis x' von der Zeit t' bis t'' verstorben sind:

$$+\int_{t'}^{t''} dt \int_{x''}^{x'} F'(t-x) \,.\, x \,.\, f'(x) dx = -\int_{t'}^{t''} dt \int_{t_0=t-x''}^{t_0=t-x'} F'(t_0) \,.\, (t-t_0) \,.\, f'(t-t_0) dt_0 \quad = {}_{t-x''}^{t-x'} AM_{t'}^{t''} \quad . \quad . \quad . \quad 21$$

— Ganz auf entsprechende Weise wie die Beziehungen zwischen den Gesammtheiten der Lebenden und Verstorbenen gefunden wurden (Gleichung 8., 9. oder 11., und 10.), so lassen sich auch die Beziehungen zwischen dem summirten Alter derselben finden, und zwar hat man:

$${}_{t_0'}^{t_0''} AM_{t_0+x'}^{t_0+x''} \quad = \Big\{F(t_0'')-F(t_0')\Big\} \Big\{x' \,.\, f(x') - x'' \,.\, f(x'') + \int_{x'}^{x''} f(x) dx \Big\}$$

$$= \int_{t_0'}^{t_0''} dt_0 \,.\, F'(t_0) \,.\, \int_{x'}^{x''} f(x) dx - \Big\{ {}_{t_0'}^{t_0''} A\,V(x'') - {}_{t_0'}^{t_0''} A\,V(x') \Big\} \quad . \quad . \quad . \quad 22$$

Die Summe, gebildet aus den Producten, die entstehen, wenn man die Zahl derjenigen, die aus der Geburtszeit t_0 stammend, das Alter x erreichen, in dx multiplicirt, für alle Werthe von $x = x'$ bis $x = x''$: nennen wir die Zeit, verlebt vom Alter x' bis x'', von denen, die zur Zeit t_0 geboren sind. Mit Hilfe dieses technischen Ausdrucks übersetzen wir die Gleichung 22. so:

Das summirte Alter derjenigen, die stammend aus der Geburtszeit t_0' bis t_0'', x' bis x'' jährig sterben, ist gleich: der Zeit, verlebt zwischen dem Alter x' bis x'' von diesen Gebornen; minus dem Zuwachs, den das summirte Alter der x jährig werdenden aus diesen Gebornen erhält, während x von x' bis x'' vorschreitet.

Man bemerke, dass das summirte Alter der Lebenden nicht ausreicht, um das summirte Alter der Verstorbenen auszudrücken: sondern dass der Begriff der verlebten Zeit noch herbeigezogen werden muss. —

Für das summirte Alter der von t' bis t'' Verstorbenen aus der Geburtszeit t_0' bis t_0'' hat man:

$${}_{t_0'}^{t_0''} AM_{t'}^{t''} \quad = \int_{t_0'}^{t_0''} F'(t_0) \Big\{(t'-t_0) \,.\, f(t'-t_0) - (t''-t_0) \,.\, f(t''-t_0) + \int_{t'}^{t''} f(t-t_0) dt \Big\} dt_0$$

$$= \int_{t_0'}^{t_0''} dt_0 \,.\, F'(t_0) \int_{t'}^{t''} f(t-t_0) dt - \Big\{ {}_{t_0'}^{t_0''} A\,V(t'') - A\,V(t') \Big\} \quad . \quad . \quad . \quad 23$$

das heisst jenes summirte Alter ist gleich der Zeit verlebt zwischen t' und t'', von denen die aus der Geburtszeit von t_0' bis t_0'' stammen; minus dem Zuwachs, den das summirte Alter derjenigen erleidet, welche, geboren von t_0' bis t_0'', die Zeit t erleben — den Zuwachs gerechnet von t' bis t''. —

Endlich für das summirte Alter der x'' bis x' jährig von t' bis t'' verstorbenen:

$$
{}_{t-x''}^{t-x'}AM_{t'}^{t''} = \Big\{F(t''-x')-F(t'-x')\Big\}.\ x.\ f(x') - \Big\{F(t''-x'')-F(t'-x'')\Big\}.\ x''.\ f(x'')
$$
$$
+\int_{t\,=\,t'-x''}^{t_0\,=\,t'-x'} F'(t_0).(t'-t_0).f(t'-t_0)dt_0 - \int_{t_0\,=\,t''-x''}^{t_0\,=\,t''-x'} F'(t_0).(t''-t_0).f(t''-t_0)dt_0 + \int_{t'}^{t''} dt \int_{t_0\,=\,t-x''}^{t_0\,=\,t-x'} F'(t_0).f(t-t_0)dt_0
$$
$$
=\int_{t'}^{t''} dt \int_{t_0\,=\,t-x''}^{t_0\,=\,t-x'} F'(t_0)f(t-t_0)dt_0 - \Big\{{}_{t'-x''}^{t''-x''}AV(x'') - {}_{t'-x'}^{t''-x'}AV(x')\Big\} - \Big\{{}_{t''-x''}^{t''-x'}AV(t'') - {}_{t'-x''}^{t'-x'}AV(t')\Big\} \quad 24
$$

das heisst jenes summirte Alter ist gleich: der Zeit verlebt zwischen t' und t'' von denjenigen, die sich jeweilig in der Altersclasse der x'' bis x' jährigen befanden; minus dem Zuwachs, gerechnet von x' bis x'', zum summirten Alter derjenigen, die von t' bis t'' das Alter x erfüllten; minus dem Zuwachs, gerechnet von t' bis t'', zum summirten Alter derjenigen, die sich zur Zeit t in der Altersclasse der x'' bis x' jährigen befanden. —

Viel einfacher wird der Inhalt der Gleichungen 22., 23. und 24. ausgesprochen, wenn man eine jede derselben noch einer nahliegenden Umformung unterzieht, wodurch sie mehr Symetrie gewinnen.

Subtrahirt man nämlich von Gleichung 22. die folgende:

$$
0 = \int_{t_0'}^{t_0''} dt_0.\ F'(t_0) \int_{x''}^{x''} f(x)dx
$$

so kann man so auslegen: Das summirte Alter derjenigen, die aus der Geburtszeit t_0' bis t_0'' stammend, vom Alter x' bis x'' verstorben sind, ist gleich:

dem Zuwachs zum summirten Alter und zu der bis zur Erfüllung des Alters x'' zu verlebenden Zeit und zwar derjenigen Individuen, die aus der Geburtszeit t_0' bis t_0'' stammend, das Alter x erreichen, den Zuwachs gerechnet von x' bis x'' und negativ genommen. (Vergl. Gleichung 8.).

Ferner durch die Subtraction der Gleichung

$$
0 = \int_{t_0'}^{t_0''} dt_0.\ F'(t_0) \int_{t''}^{t''} f(t-t_0)dt \text{ von Gleichung 23:}
$$

Das summirte Alter derjenigen, die aus der Geburtszeit t_0' bis t_0'', stammend von der Zeit t' bis t'' sterben, ist gleich:

dem Zuwachs zum summirten Alter und zu der bis zur Erreichung des Punctes t'' zu verlebenden Zeit derjenigen Individuen, welche aus der Geburtszeit t_0' bis t_0'' stammend, die Zeit t erreichen; den Zuwachs gerechnet von t' bis t'' und negativ genommen. (Vergl. Gleichung 10.)

Die Umformung der Gleichung 24. ist weniger einfach; sie beruht darauf, dass man zuerst anstatt der Zeit, verlebt zwischen t' und t'', von den jeweilig

x'' bis x' jährigen einen andern Ausdruck findet, mit Hilfe derselben analytischen Sätze, deren wir uns bisher bedienten.

Es ist nämlich:

$$\int_{t'}^{t''} dt \int_{t_0=t-x''}^{t_0=t-x'} F'(t_0).\, f(t-t_0).\, dt_0 = \left\{F(t''-x') - F(t'-x')\right\} \int_{x'}^{x''} f(x)dx - \left\{F(t''-x'')-F(t'-x'')\right\} \int_{x''}^{x''} f(x)dx$$

$$+ \int_{t_0=t'-x''}^{t_0=t'-x'} F'(t_0).\, \int_{x=t'-t_0}^{x=x''} f(x)dx.\, dt_0 \qquad - \int_{t_0=t''-x''}^{t_0=t''-x'} F'(t_0) \int_{x=t''-t_0}^{x=x''} f(x)dx.\, dt_0 \quad 25$$

das heisst die Zeit verlebt zwischen t' und t'' von den jeweilig x'' bis x' jährigen ist gleich:

der Zeit, verlebt zwischen dem Alter x' und x'' von denen, die zwischen t' und t'' das Alter x' erfüllen;

minus: der Zeit, verlebt zwischen dem Alter x'' und x'' von denen, die von t' bis t'' das Alter x'' erfüllen (diese Grösse ist gleich Null und wird nur der Symmetrie halber angeschrieben);

plus: der Zeit, verlebt von denen, die zur Zeit t' x'' bis x' jährig sind, vom Alter, das sie zur Zeit t' haben, bis zur Erfüllung des Alters x'';

minus: der Zeit, verlebt von denen, die zur Zeit t'' x'' bis x' jährig sind, vom Alter, das sie zur Zeit t'' haben, bis zur Erfüllung des Alters x''.

Wenn man das in Gleichung 25. gefundene in Gleichung 24. einführt, so erhält man folgenden leichter zu übersehenden Ausdruck:

$$ {}_{t-x''}^{t-x'}AM_{t'}^{t''} = \left\{F(t''-x')-F(t'-x')\right\} \left\{x' f(x') + \int_{x'}^{x''} f(x)dx\right\} - \left\{F(t''-x'')-F(t'-x'')\right\} \left\{x'' f(x'') + \int_{x''}^{x''} f(x)dx\right\}$$

$$+ \int_{t_0=t'-x''}^{t_0=t'-x'} F'(t_0) \left\{(t'-t_0) f(t'-t_0) + \int_{x=t'-t_0}^{x=x''} f(x)dx\right\} dt_0 - \int_{t_0=t''-x''}^{t_0=t''-x'} F'(t_0) \left\{(t''-t_0) f(t''-t_0) + \int_{x=t''-t_0}^{x=x''} f(x)dx\right\} dt_0 \,. \quad 26$$

den man so übersetzen kann: das summirte Alter der von t' bis t'' im Alter x'' bis x' Verstorbenen ist gleich:

dem Zuwachs, den das summirte Alter und die bis zur Erfüllung des Alters x'' zu verlebende Zeit erhalten, und zwar derjenigen Individuen, die von t' bis t'' das Alter x erfüllen; den Zuwachs gerechnet x' bis x'' und negativ genommen;

plus: dem Zuwachs, den das summirte Alter und die bis zur Erfüllung des Alters x'' zu verlebende Zeit erhalten, und zwar derjenigen Individuen, die zur Zeit t im Alter x'' bis x' stehen; den Zuwachs gerechnet von t' bis t'' und negativ genommen. (Vergl. Gleichung 9. oder 11.)

Hieraus ergibt sich: dieselben Beziehungen, welche zwischen den Gesammtheiten der Verstorbenen und denen der Lebenden bestehen (Gleichung

8., 10., 11.) wiederholen sich zwischen dem summirten Alter der Verstorbenen einerseits und dem summirten Alter der Lebenden plus der zu verlebenden Zeit andrerseits (Gleichung 22., 23. und 26.), wobei übrigens wegen der zu verlebenden Zeit noch die näheren Bestimmungen bestehen, die im Text angegeben sind.

Ganz besonders wichtig wird für den zweiten Theil dieser Abhandlung die Gleichung 26. sein: aus ihr ergibt sich nämlich, dass das summirte Alter der von t' bis t'' im Alter x'' bis x' Verstorbenen eine sehr nahe Beziehung zu den Grössen $x' \cdot f(x')$, $x'' f(x'')$ und $\int_{x'}^{x''} f(x)dx$ hat, die dort näher zu untersuchen sein wird. —

Das summirte Alter der gleichaltrig Lebenden (Gleichung 15. und 16.) kann aus Aufzeichnungen über Lebende nicht nachgewiesen werden, weil, wie schon zu Gleichung 1. und 2. bemerkt, solche Aufzeichnungen über das Erleben eines gewissen Alters nicht existiren. Hingegen hat man hier dieselben Ersatzmittel, welche im vorigen Capitel für die Auffindung der Gesammtheiten der gleichaltrig Lebenden angegeben sind: denn man kann durch die einzige Multiplication des Alters mit der Grösse der Gesammtheit das summirte Alter finden.

Das summirte Alter der gleichzeitig Lebenden, (Gleichung 17. und 18.), dagegen ist zwar aus dem Material, das uns die Zahl der gleichzeitig Lebenden überliefert — aus den Volkszählungslisten also — leicht zu finden: wenn nur in solchen Listen regelmässig das Alter und nicht nur die Altersclasse angegeben wäre. Man brauchte dann eben nur alle Altersangaben zu summiren. Ist anstatt des Alters der Geburtstag angegeben, so muss das Alter eines jeden für die Zeit t', wo die Zählung stattfindet, zuerst berechnet werden, ehe die Addition stattfinden kann.

Das summirte Alter der Verstorbenen nachzuweisen, ist in allen drei Fällen (Gleichung 19. 20. 21.) ein leichtes. Nachdem in den Sterberegistern die Sterbefälle abgegrenzt sind, die zu einer von den drei Gesammtheiten gehören, werden die Altersangaben für alle abgegrenzten Sterbefälle addirt; so erhält man das summirte Alter einer Gesammtheit von Verstorbenen. Alle Methoden, welche nicht jede einzelne Altersangabe berücksichtigen, sind Näherungsmethoden und gehören deshalb nicht hieher. —

Das summirte Alter derjenigen, die aus einer Einheit von Gebornen das Alter x erreichen, also die Grösse $xf(x)$, wird gefunden, nachdem man $f(x)$ hergestellt hat.

Dagegen das summirte Alter der aus einer Einheit von Gebornen im Alter x' bis x'' verstorbenen, (vergl. Eingang dieses Capitels) findet man aus dem summirten Alter der x' bis x'' jährig Verstorbenen, die aus der Geburtszeit t_0' bis t_0'' stammen, wenn durch die Zahl der zwischen diesen Zeitpunkten Gebornen dividirt wird. (Gleichung 22.)

Daraus findet man die Zeit, verlebt von den x jährig gewordenen aus einer Einheit von Geboruen, zwischen x' und x'': denn wenn man zum summirten Alter der Verstorbenen, nämlich zu $x'.\,f(x') - x''.\,f(x'') + \int_{x'}^{x''} f(x)dx$ die Differenz:

$$x''.\,f(x'') - x'.\,f(x')$$

addirt, so bleibt allein das Integral übrig, das wir unter jener „verlebten Zeit" verstehen. —

Das summirte Alter der Verstorbenen ist nur dann gleich der verlebten Zeit wenn:

$$x''.\,f(x'') - x'.\,f(x') = 0,$$

das heisst wenn der Zuwachs, den das summirte Alter der x jährig werdenden (aus einer Einheit Geborner) von x'' bis x'' erhält, gleich Null ist. Diese Bedingung ist insbesondere für jede Absterbeordnung erfüllt, wenn man setzt: $x' = 0$; $x'' = \omega$.

Also immer ist das summirte Alter der 0 bis ω jährig verstorbenen (aus einer Einheit von Geboruen) gleich der Zeit, verlebt von diesen Gebornen vom Alter 0 bis ω. Dasselbe gilt noch für gewisse andre Werthe von x' und x'', die man jedoch ohne Kenntniss der Absterbeordnung nicht angeben kann, es gilt aber nicht im allgemeinen für x' und x''. —

Die Zeit, verlebt von einer Einheit Geborner zwischen dem Alter x' und x'', kann man nicht nur aus Gleichung 22., sondern auch aus Gleichung 26. finden, (niemals jedoch aus 23); aber es verlohnt sich eben nur es zu erwähnen wegen der grossen Umständlichkeit des Verfahrens. —

Die graphische Darstellung der Sätze über das summirte Alter ist auf dieselbe Weise möglich, wie in den früheren Capiteln die graphische Darstellung der Gesammtheiten. Um indessen sehr weitläufige Zeichnung und Erklärung zu ersparen, sei es an folgenden Andeutungen genug:

Das summirte Alter der gleichaltrig Lebenden wird versinnlicht durch die Summe der Rechtecke, die entstehen aus der Abscisse x und der Ordinate, welche die x jährig werdenden aus jedem Geburtenzuwachs bedeutet.

Aehnlich das summirte Alter der gleichzeitig Lebenden: Die Rechtecke, die zu summiren sind, werden gebildet aus der Ordinate, welche die $t - t_0$ jährig werdenden aus jedem Geburtenzuwachs bedeutet, und der zugehörigen Abscisse $x = t - t_0$.

Wenn in Fig. 20 die Ordinate OT den Geburtenzuwachs $F'(t_0).\,dt_0$ bedeutet, dessen Absterben durch die Curve TU versinnlicht wird; und wenn man die Abscisse $OM = x$ setzt: so bedeutet der Flächeninhalt des Rechtecks $OMQR$ das summirte Alter der aus jenem Geburtenzuwachs x jährig werdenden.

Das summirte Alter der von x' bis x'' Verstorbenen aus jenem Geburtenzuwachs wird dargestellt durch die Fläche $SPQR$, wenn $OM = x'$ und $ON = x''$;

die Fläche $MQPN$ bedeutet dann die Zeit, verlebt von den x jährig werdenden jenes Geburtenzuwachses von x' bis x''.

Setzt man $OT = 1$, so kann man leicht den Zusammenhang zwischen dem summirten Alter der x' bis x'' jährig aus einer Einheit von Gebornen sterbenden einerseits, und dem summirten Alter der x' sowie der x'' jährig werdenden und der verlebten Zeit andrerseits, aus der Fig. 20. erkennen, man hat:

$$SPQR = OMQR - ONPS + MNPQ$$

Das summirte Alter einer Gesammtheit von Verstorbenen entsteht, wenn man dieselbe Construction für alle diejenigen Zuwächse von Gebornen ausführt, die vermöge der Begrenzung der Gesammtheit in Betracht kommen.

Will man wegen der Weitläufigkeit darauf verzichten, die einzelnen zu summirenden Flächenräume ihrer Grösse nach darzustellen, und begnügt man sich nur anzugeben, wo sie liegen: so hat das keine Schwierigkeit: man verfährt dabei ganz ähnlich, wie man verfuhr, um die Lage der Linien zu versinnlichen, aus denen sich die Gesammtheiten zusammensetzen.

Indem wir dies und andres — z. B. die Grenzwerthe, zwischen denen das summirte Alter eingeschlossen ist — dem Leser überlassen, wenden wir uns im nächsten Capitel zur Darstellung andrer, bisher noch nicht erwähnter Gesammtheiten. Dieselben werden die Gelegenheit bieten, zum Schlusse noch einmal auf die früheren Gesammtheiten der Verstorbenen zurückzukommen, um sie zu „zerlegen," wodurch nicht nur ihre wesentliche Verschiedenheit noch deutlicher hervortritt, sondern auch für die praktische Statistik, für die Frage, was zu erheben sei, mit andern Worten für die Einrichtung der Tabellenköpfe Vorschläge gewonnen werden, die, wie mir scheint, zum ersten Mal streng begründet sind.

Sechstes Capitel.

Andre Gesammtheiten von Lebenden und Verstorbenen; besondre Fälle derselben; Zerlegung derselben.

In der Einleitung wurde es als Aufgabe bezeichnet, die allgemeinen Eigenschaften der Gesammtheiten von Lebenden und Verstorbenen darzustellen; und zwar derjenigen Gesammtheiten, die durch Angaben über Alter, Zeit, Geburtszeit bestimmt oder begrenzt sind.

Von dieser Aufgabe ist bis jetzt nur ein Theil gelöst; es sind noch Gesammtheiten rückständig, deren noch nicht einmal Erwähnung geschah.

Der Weg, den wir einschlugen — es war vielleicht nicht der nächstliegende, aber er hat uns jedenfalls zu einer geordneten Bewältigung des Stoffes verholfen — war der: bei der Definition des Alters bemerkten wir, dass die Gesammtheiten von Lebenden und Verstorbenen, welche durch zwei Punkte aus den dreien (Punkt des Alters, Punkt der Erfüllungszeit, Punkt der Geburtszeit)

begrenzt sind, nicht wesentlich verschieden sein können, weil durch zwei gegebene von den drei Punkten der dritte zugleich bestimmt wird. Aber bei der stätigen Geburtenvertheilung und der stätigen Absterbeordnung stellten sich die so begrenzten Gesammtheiten als unendlich kleine Grössen heraus. Auf solche Gesammtheiten war es jedoch nicht abgesehen, es mussten endliche Gesammtheiten sein, sonst waren sie nicht nachweisbar. Endliche Gesammtheiten aus den unendlich kleinen mussten durch Integration herstellbar sein.

Dabei hat sich gezeigt, dass, um endliche Gesammtheiten von Lebenden herzustellen, zu den zwei anfänglich gewählten Punkten noch ein dritter — die Integrationsconstante — hinzugenommen werden muss; und dass, um endliche Gesammtheiten der Verstorbenen herzustellen, zu den anfänglich gewählten zwei Punkten noch ein dritter und vierter — je eine Constante aus jeder der zwei Integrationen — hinzutritt.

Aber bisher haben wir uns in der Wahl der drei Punkte für endliche Gesammtheiten von Lebenden, sowie der vier Punkte für endliche Gesammtheiten von Verstorbenen mehr beschränkt als nöthig war. Denn es ist erinnerlich, dass zur Herstellung der bis jetzt behandelten Gesammtheiten nur zwischen festen Grenzen der Veränderlichen integrirt wurde. Dadurch erhielt man die Gesammtheiten der gleichaltrig Lebenden, die aus einer Geburtszeit mit festen Grenzen t_0' und t_0'' stammen (Gleichung 1.) oder deren Erfüllungszeit die festen Grenzen t' und t'' hat (Gleichung 2.); ähnlich bei den gleichzeitig Lebenden und bei den Verstorbenen.

Man hat also nur hergestellt:

die Gesammtheiten der Lebenden, die bestimmt sind

durch die gegebenen Punkte:	x, t_0', t_0''	(Gleichung 1.)
oder durch die Punkte:	x, t', t''	(Gleichung 2.)
oder durch die Punkte:	t, t_0', t_0''	(Gleichung 3.)
oder durch die Punkte:	t, x', x''	(Gleichung 4.)

sowie die Gesammtheiten der Verstorbenen, die bestimmt sind

durch die Punkte:	x', x'', t_0', t_0''	(Gleichung 5.)
oder durch die Punkte:	t_0', t_0'', t', t''	(Gleichung 6.)
oder durch die Punkte:	t', t'', x', x''	(Gleichung 7.)

Nennen wir sie die Hauptgesammtheiten, so ist ihr Merkmal, dass man zur Bestimmung der Lebenden gegeben hat:

einen Punkt des Alters und eine Strecke der Geburtszeit;
einen Punkt des Alters und eine Strecke der Erfüllungszeit;
einen Zeitpunkt und eine Strecke der Geburtszeit;
einen Zeitpunkt und eine Strecke des Alters;

bei den Verstorbenen:

eine Strecke des Alters, eine Strecke der Geburtszeit;
eine Strecke der Geburtszeit, eine Strecke der Sterbezeit;
eine Strecke der Sterbezeit, eine Strecke des Alters.

Ausser diesen Hauptgesammtheiten sind offenbar noch andre möglich, die wir Nebengesammtheiten nennen wollen, nämlich solche, die bestimmt sind:

bei den Lebenden: durch Angabe eines Alters; eines Grenzpunktes der Geburtszeit; eines Grenzpunktes der Erfüllungszeit; $(x;\ t_0,\ t)$

oder: durch Angabe einer Zeit; eines Grenzpunktes der Geburtszeit; eines Grenzpunktes des Alters; $(t;\ t_0,\ x)$

bei den Verstorbenen: durch Angabe einer Strecke der Geburtszeit; eines Grenzpunktes des Alters; eines Grenzpunktes der Sterbezeit; $(t_0',\ t_0'',\ x,\ t)$

oder: durch Angabe einer Strecke der Sterbezeit; eines Grenzpunktes der Geburtszeit; eines Grenzpunktes des Alters; $(t',\ t'',\ t_0,\ x)$

oder: durch Angabe einer Strecke des Alters; eines Grenzpunktes der Geburtszeit; eines Grenzpunktes der Sterbezeit. $(x',\ x'',\ t_0,\ t)$.

Es ist die Aufgabe dieses Capitels, die angedeuteten Nebengesammtheiten in derselben Weise, wie früher die Hauptgesammtheiten, darzustellen. —

Zuerst die der Lebenden. Die Lebenden des Alters x, wenn für die Geburtszeit eine Grenze t_0, für die Erfüllungszeit eine Grenze t gegeben ist, lassen sich wegen der Beziehung zwischen Alter, Geburtszeit und Erfüllungszeit auch so bestimmen: die Lebenden des Alters x, die aus einer Strecke der Geburtszeit stammen, welche durch t_0 und $t-x$ begrenzt wird; oder: die Lebenden des Alters x, deren Erfüllungszeit begrenzt wird durch t und t_0+x. Man wird also, um diese Nebengesammtheit darzustellen, entweder den Ausdruck $dt.\ F'(t_0).f(x)$ benutzen können, oder den Ausdruck $dt.\ F'(t-x).\ f(x)$, indem man zwischen Grenzen integrirt, von denen die eine von x abhängig ist (während die Wahl von unabhängigen Grenzen auf Hauptgesammtheiten führte).

Indessen ist wegen der gegebenen Punkte t_0 und t noch etwas nachzutragen. Soll t_0 die obere Grenze der Geburtszeit sein, so muss, damit die Aufgabe einen Sinn hat, das t so gewählt sein, dass $t-x<t_0$; soll t_0 die untere Grenze der Geburtszeit sein, so ist nur ein solches t_0 statthaft dass $t_0<t-x$; daran hat man sich wegen der Richtung der Integration zu halten. Es erscheinen also hier zwei Nebengesammtheiten der gleichaltrig Lebenden, nämlich:

wenn $t-x<t_0$:
$$f(x).\int_{t-x}^{t_0} F'(t_0)dt_0 = f(x).\int_{t}^{t_0+x} F'(t-x)dt = {}_{t-x}^{t_0}V(x) \quad . \quad . \quad . \quad 27$$

wenn $t_0<t-x$:
$$f(x).\int_{t_0+x}^{t} F'(t-x)dt = f(x).\int_{t_0}^{t-x} F'(t_0)dt_0 = {}_{t_0}^{t-x}V(x) \quad . \quad . \quad . \quad 28$$

Die Bezeichnung ist ganz wie früher, die Integration ist ausführbar, aber die beiden so erhaltenen Nebengesammtheiten sind, wenn x unbeweglich gedacht wird, von den Hauptgesammtheiten in Gleichung 1. und 2. nicht wesentlich verschieden. Ihr Verhalten bei veränderlichem x wird ebenso untersucht,

wie es für die Hauptgesammtheit der Gleichung 2. im dritten Capitel geschah, und bedarf daher keiner besondern Ausführung.

Gehen wir zu den Nebengesammtheiten der gleichzeitig Lebenden über; also gegeben die Zeit t; eine Altersgrenze x; und eine Grenze t_0 für die Geburtszeit. Hier kann man die Bestimmung der Gesammtheit auch so fassen: die zur Zeit t lebenden, stammend aus der Geburtszeit, die begrenzt wird durch $t-x$ und t_0; oder: angehörig der Altersclasse, die begrenzt wird durch $t-t_0$ und x; sodass also sowohl $dt_0 . F'(t_0) . f(t-t_0)$ als auch $-dx . F'(t-x) f(x)$ angewendet werden können. Doch entstehen auch hier zweierlei Gesammtheiten je nachdem $t-x < t_0$ oder $t_0 < t-x$, man hat also:

$$\text{wenn } t-x<t_0: \quad \int_{t-x}^{t} dt_0 . F'(t_0) . f(t-t_0) = -\int_{t-t_0}^{x} dx . F'(t-x) . f(x) = {}_{t-x}^{t_0} V(t) \quad . \quad . \quad . \quad 29$$

$$\text{wenn } t_0<t-x: \quad -\int_{x}^{t-t_0} dx . F'(t-x) . f(x) = \int_{t_0}^{t-x} dt_0 . F'(t_0) . f(t-t_0) = {}_{t_0}^{t-x} V(t) \quad . \quad . \quad . \quad 30$$

Bezeichnung wie früher, Integration nicht ausführbar. So lange t unbeweglich, sind diese beiden Nebengesammtheiten nicht wesentlich von den Hauptgesammtheiten in Gleichung 3. und 4. verschieden; ist t beweglich, so werden die Veränderungen derselben so untersucht, wie im dritten Capitel bei der Gesammtheit der Gleichung 4. —

Viel interessanter sind die Nebengesammtheiten der Verstorbenen, zu denen wir nun übergehen.

Es sei verlangt: die Verstorbenen, die aus der Geburtszeit t_0' bis t_0'' stammen, wenn für das Alter eine Grenze x, für die Sterbezeit eine Grenze t gegeben ist; das heisst: die Verstorbenen aus jener Geburtszeit, deren Alter begrenzt wird durch $t-t_0$ und x; oder auch: deren Sterbezeit begrenzt wird durch t und t_0+x. Man wird also sowohl den Ausdruck $-dt_0 . F'(t_0) . f'(x)dx$, als auch $-dt_0 . F'(t_0) . f'(t-t_0)dt$ benützen können, um die geforderte Gesammtheit daraus zu entwickeln.

Wir wählen den letzern und finden, berücksichtigend, dass t die obere oder auch die untere Grenze der Sterbezeit bedeuten kann, folgenden Ausdruck für die verlangte Nebengesammtheit:

$$\mp\int_{t_0'}^{t_0''} dt_0 F'(t_0) \int_{t=t}^{t=t_0+x} f'(t-t_0)dt = \pm{}_{t_0'}^{t_0''} M_t^{t_0+x} = \pm\left\{\int_{t_0'}^{t_0''} F'(t_0) f(t-t_0)dt_0 - [F(t_0'')-F(t_0')]\, f(x)\right\} \quad 31$$

Das obere Vorzeichen findet statt, wenn x das höchste Alter, t die früheste Sterbezeit; das untere Vorzeichen, wenn x das niedrigste Alter, t die späteste Sterbezeit sein soll; es bedeutet die Vertauschung der Grenzen des innern Integrals. Die Lebenden, durch welche man diese Gesammtheit von Verstorbenen ausdrücken kann, sind zugleich beigefügt; ebenso bei den folgenden Nebengesammtheiten.

Beispiel (für das obere Vorzeichen): Diejenigen, welche geboren von $t_0' = 1808$ bis $t_0'' = 1815$, verstorben sind von $t = 1820$ an und ehe sie das Alter von $x = 30$ Jahren erreichten; man erhält sie, wenn man die 30 jährig gewordenen aus jener Geburtszeit subtrahirt von denen, die am Ende des Kalenderjahrs 1820 (Anfang des Kalenderjahrs 1821) aus jener Geburtszeit vorhanden waren. In Fig. 11. ist die Lage dieser Lebenden graphisch dargestellt.

Beispiel für das untere Vorzeichen: $t = 1850$, das heisst diejenigen, welche aus jener Geburtszeit stammend, vor dem Ende des Kalenderjahrs 1850 und über 30 jährig verstorben sind. Die Lage der Lebenden, worauf diese Verstorbenen zurückgeführt werden können, ist in Fig. 12. versinnlicht.

Ferner: die Verstorbenen, wenn die Strecke der Sterbezeit gegeben ist (t', t'') und eine Grenze t_0 der Geburtszeit sowie ein Grenzalter x. Man hat dann:

$$\mp\int_{t'}^{t''} dt \int_{t_0 = t-x}^{t_0 = t_0} F'(t_0)\, f'(t-t_0)\, dt_0 = \pm\, {}_{t-x}^{\;\;t_0}M_{t'}^{t''} = \pm \Big\{ \int_{t'-x}^{t_0} F'(t_0) f(t'-t_0)\, dt_0 - \int_{t''-x}^{t_0} F'(t_0)\, f(t''-t_0)\, dt_0$$
$$- [F(t''-x) - F(t'-x)]\, f(x) \Big\} \qquad 32$$

Das obere Vorzeichen findet statt, wenn x das höchste Alter, t_0 die obere Grenze der Geburtszeit ist; das untere Vorzeichen, wenn x das niederste Alter, t_0 die früheste Geburtszeit.

Man wird hier auf drei Gesammtheiten von Lebenden geführt, diese Nebengesammtheit von Verstorbenen ist also weniger einfach als die vorhergehende.

Beispiel für das obere Vorzeichen: die von $t' = 1860$ bis $t'' = 1870$ verstorbenen, welche unter 20 Jahre alt sind und früher als $t_0 = 1855$ geboren waren. Man erhält sie, wenn man von denjenigen, die aus der Geburtszeit 1840 bis 1855 zur Zeit 1860 vorhanden sind, folgende subtrahirt: die von 1860 bis 1870 das Alter 20 erfüllen; und die zur Zeit 1870 vorhanden sind aus der Geburtszeit 1850 bis 1855. Vergl. die Fig. 13.

Für das untere Vorzeichen: wenn man verlangt die von $t' = 1860$ bis $t'' = 1870$ Verstorbenen, welche älter als 20 Jahre sind und nach 1830 geboren waren. Man erhält sie so: die zur Zeit 1860 lebenden aus der Geburtszeit 1830 bis 1840; hierzu addirt: die von 1860 bis 1870 das Alter 20 erfüllenden; davon subtrahirt: die zur Zeit 1870 lebenden aus der Geburtszeit 1830 bis 1850. Vergl. Fig. 14.

Endlich sei für die Verstorbenen die Strecke des Alters (x', x'') und eine Grenze der Geburtszeit, eine der Sterbezeit gegeben; so ist diese Nebengesammtheit so darzustellen:

$$\pm\int_{x'}^{x''} dx \int_{t-x}^{t_0} F'(t_0)\, f'(x)\, dt_0 = \pm\, {}_{t-x''}^{t-x'}M_{t}^{t+x} = \mp\, {}_{t-x}^{\;\;t_0}M_{t_0+x'}^{t_0+x''}$$
$$= \pm \Big\{ [F(t_0) - F(t-x')]\, f(x') - [F(t_0) - F(t-x'')]\, f(x'') + \int_{t_0 = t-x''}^{t_0 = t-x'} F'(t_0)\, f(t-t_0)\, dt_0 \Big\} \qquad 33$$

Das obere Vorzeichen in Gleichung 33 findet statt, wenn t_0 die obere Grenze der Geburtszeit, t die untere Grenze der Sterbezeit ist; das untere Vorzeichen, wenn t_0 die Grenze der Geburtszeit, t die obere Grenze der Sterbezeit ist.

Beispiel zum obern Vorzeichen: die 10 bis 13 jährig nach der Zeit 1840 verstorbenen, welche vor der Zeit 1835 geboren waren. Man findet sie aus folgenden Lebenden: die 13 bis 10 jährigen, welche zur Zeit 1840 vorhanden sind; hierzu addirt: die das Alter 10 erfüllen, stammend aus der Geburtszeit 1830 bis 1835; davon subtrahirt: die das Alter 13 erfüllen, stammend aus der Geburtszeit 1827 bis 1835; vergl. Fig. 15.

Beispiel zum untern Vorzeichen: die 10 bis 13 jährig vor der Zeit 1850 verstorbenen, welche nach der Zeit 1830 geboren waren. Sie sind aus folgenden Lebenden zu finden: die 10 jährig werdenden aus der Geburtszeit 1830 bis 1840; davon subtrahirt: die 13 jährig werdenden aus der Geburtszeit 1830 bis 1837; ferner subtrahirt: die zur Zeit 1850 vorhandenen 13 bis 10 jährigen; vergl. Fig. 16.

Man hat also sechs wesentlich verschiedene Nebengesammtheiten von Verstorbenen, deren Verschiedenheit sich am leichtesten übersehen lässt, wenn man in den punctirten Linien der Fig. 11. bis 16. incl. die Lage der Lebenden vergleicht, auf welche jede Nebengesammtheit von Verstorbenen zurückgeführt werden kann. —

Indessen gibt es besondere Fälle, für welche man nicht sechs, sondern nur zwei wesentlich verschiedene Nebengesammtheiten aus den Gleichungen 31., 32. und 33. gewinnt: Fälle, die ein ganz besonderes Interesse darbieten.

Wenn nämlich in jeder der drei Gleichungen das obere Vorzeichen stattfindet; und man wählt die Grössen, wodurch die Gesammtheiten bestimmt werden so, dass

in Gleichung 31: $t = t_0' + x$
in Gleichung 32: $t_0 = t'' - x$
in Gleichung 33: $t_0 = t - x'$, so erscheint aus

$$\text{Gl. 31:} \quad {}_{t_0'}^{t_0''}M_{t_0'+x}^{t_0+x} = \int_{t_0'}^{t_0''} F'(t_0) \Big\{ f(t_0'+x-t_0) - f(x) \Big\} dt_0 \quad \ldots \quad 34$$

$$\text{Gl. 32:} \quad {}_{t\,-x}^{t''-x}M_{t'}^{t''} = \int_{t_0=t'-x}^{t_0=t_0} F'(t_0) \Big\{ f(t'-t_0) \quad - f(x) \Big\} dt_0 \quad \ldots \quad 35$$

$$\text{Gl. 33:} \quad {}_{t-x''}^{t-x'}M_{t_0+x'}^{t+x} = \int_{t_0=t-x''}^{t_0=t_0} F'(t_0) \Big\{ f(t-t_0) \quad - f(x'') \Big\} dt_0 \quad \ldots \quad 36$$

Es erscheinen hier drei Ausdrücke, die nicht wesentlich von einander verschieden sind; denn ein jeder bedeutet: die Verstorbenen, stammend aus einer gewissen Strecke der Geburtszeit (oder einer gewissen Generation), vor einem gewissen

Alter, und später verstorben als der Zeitpunkt, wo der frühest Geborne der Generation jenes Alter erfüllte; kürzer: die Verstorbenen aus einer Generation, vom Anfang der Erfüllungszeit eines Alters, bis zur Erfüllung des Alters. Die drei Ausdrücke werden identisch, wenn man in jedem derselben die Grenzen für die Geburtsstrecke und in jedem derselben Alter oder Anfang der Erfüllungszeit einander gleich setzt.

Wenn hingegen in Gleichung 31., 32. und 33. das untere Vorzeichen stattfindet; und man wählt die Grössen, durch welche die Gesammtheiten bestimmt werden so, dass

in Gleichung 31: $t = t_0'' + x$
in Gleichung 32: $t_0 = t' - x$
in Gleichung 33: $t_0 = t - x''$, dann erscheint aus

$$\text{Gl. 31:} \quad {}_{t_0'}^{t_0''}M_{t_0+x}^{t''+x} = \int_{t_0'}^{t_0''} F'(t_0) \left\{ f(x) - f(t_0''+x-t_0) \right\} dt_0 \quad . \quad . \quad . \quad 37$$

$$\text{Gl. 32:} \quad {}_{t'-x}^{t-x}M_{t'}^{t''} = \int_{t_0=t_0}^{t_0=t''-x} F'(t_0) \left\{ f(x) - f(t''-t_0) \right\} dt_0 \quad . \quad . \quad . \quad 38$$

$$\text{Gl. 33:} \quad {}_{t-x''}^{t-x'}M_{t+x}^{t_0+x''} = \int_{t_0=t_0}^{t_0=t-x'} F'(t_0) \left\{ f(x') - f(t-t_0) \right\} dt_0 \quad . \quad . \quad . \quad 39$$

die ebenfalls nicht wesentlich von einander verschieden sind. Jeder von den drei Ausdrücken bedeutet: die Verstorbenen aus einer gewissen Generation, von einem gewissen Alter bis zu dem Zeitpunkt, wo der spätest Geborne aus der Generation jenes Alter erfüllt; kürzer: die Verstorbenen aus einer gewissen Generation, von einem gewissen Alter bis zum Ende der Erfüllungszeit dieses Alters. Die drei Ausdrücke können identisch gemacht werden, wenn man in jedem dieselben Grenzen der Geburtsstrecke und dasselbe Alter oder dieselben Endpunkte der Erfüllungszeit einführt.

Man hat also zweierlei besondere Nebengesammtheiten von Verstorbenen (wie wir sie nennen wollen):

Die Verstorbenen aus einer gewissen Generation, vom Anfang der Erfüllungszeit bis zu einem Alter; sie sind auf zwei Gesammtheiten von Lebenden zurückführbar, deren Lage man durch die Linien *AB* und *AC* in Fig. 11. (und ähnlich in Fig. 13. und 15.) versinnlichen kann: erste Art; Gl. 34., 35., 36.

Und die Verstorbenen aus einer gewissen Generation, von einem Alter bis zum Ende der Erfüllungszeit desselben; sie sind gleichfalls auf zwei Gesammtheiten von Lebenden zurückführbar, deren Lage durch die Linien *AB* und *AC* in Fig. 12. (und ähnlich in Fig. 14. und 16.) versinnlicht wird: zweite Art; Gl. 37., 38., 39.

In beiden Fällen sind es Linien, von denen die eine eine Gerade ist, parallel der Geburtenaxe, die andre eine Curve, parallel der Geburtencurve. Im ersten Fall geht die Curve durch den Fusspunkt *A*, im zweiten Fall durch den Endpunkt *B* der Geraden. Fusspunkt und Endpunkt werden bestimmt durch

Parallelen zur Abscissenaxe, mit dem Abstand $F(t_0')$ resp. $F(t_0'')$. Es ist nicht nöthig, hierbei ausführlicher zu sein. —

Die besonderen Nebengesammtheiten sind dadurch wichtig, weil man mit ihrer Hilfe jede der sechs Nebengesammtheiten, die aus Gleichung 31., 32. 33. hervorgehen, sehr einfach zerlegen kann. Jede Nebengesammtheit ist nämlich darstellbar als die Summe einer Hauptgesammtheit und einer besonderen Nebengesammtheit, und zwar in zweifacher Weise; es ist, wie wir es ausdrücken wollen, eine zweifache Zerlegung möglich.

Gelten in den Gleichungen 31., 32. und 33. die obern (untern) Vorzeichen, so ist

die Nebengesammtheit der Gleichung 31. — bei deren Bestimmung t_0' und t_0'' gegeben waren — ist zerlegbar in eine der Hauptgesammtheiten, bei deren Bestimmung t_0' und t_0'' gegeben waren, und in eine besondere Nebengesammtheit der ersten (zweiten) Art;

die Nebengesammtheit der Gleichung 32. — bei deren Bestimmung t' und t'' gegeben waren — ist zerlegbar in eine der beiden Hauptgesammtheiten, bei deren Bestimmung t' und t'' gegeben waren; und in eine besondere Nebengesammtheit der ersten (zweiten) Art;

die Nebengesammtheit der Gleichung 33. — bei deren Bestimmung x' und x'' gegeben waren — ist zerlegbar in eine der beiden Hauptgesammtheiten, bei deren Bestimmung x' und x'' gegeben waren und in eine besondere Nebengesammtheit der ersten (zweiten) Art.

Analytisch ist diese Zerlegung so auszuführen, dass man die Integrale, durch welche die Lebenden dargestellt werden, auf welche man bei jeder Nebengesammtheit geführt wird, zweckmässig zerlegt, aber es ist kein Grund vorhanden, alle die 12 weitläufigen Gleichungen anzuschreiben. Die Zerlegung selbst wird aus der graphischen Darstellung hinreichend erkennbar sein, wenn wir sie für Fig. 11. (Gleichung 31. beim oberen Vorzeichen) erklären: Wenn man unter $[AB]$ die Summe der unendlich kleinen Ordinaten versteht deren Lage durch die Linie AB abgedeutet ist; und ähnlich bei den andern Linien; so sieht man, dass

$${}_{t_0'}^{t_0''}M_t^{t_0+x} = [DE]-[AC] = \{[DE]-[DF]\} + \{[DF]-[AC]\} = \{[DE]-[AB]\} + \{[AB]-[AC]\}$$

woraus die doppelte Zerlegung erhellt, denn

$[DF]-[AC]$ bedeutet, nach der Figur, die eine Hauptgesammtheit, worin t_0' und t_0'' vorkommt, und

$[DE]-[DF]$ bedeutet eine besondere Nebengesammtheit der ersten Art; während:

$[DE]-[AB]$ die andre Hauptgesammtheit bedeutet, worin t_0' und t_0'' vorkommt, und

$[AB]-[AC]$ auch eine besondere Nebengesammtheit der ersten Art. (Aehnlich bei den andern Nebengesammtheiten.) Angewendet auf das Beispiel, das früher (Seite 58) gegeben wurde, findet man:

Die Verstorbenen aus der Geburtszeit $t_0' = 1808$ bis $t_0'' = 1815$, von der Sterbezeit $t = 1820$ bis zum Alter $x = 30$ sind identisch:

den Verstorbenen aus jener Geburtszeit, von der Sterbezeit 1820 bis zum Alter $t - t_0' = 12$, dessen Erfüllungszeit bei t beginnt (besondere Nebengesammtheit erster Art);

plus den Verstorbenen aus der Geburtszeit $t_0' = 1808$ bis $t_0'' = 1815$, vom Alter 12 bis 30 (Hauptgesammtheit, worin t_0' und t_0'' vorkommen).

Oder sie sind identisch:

den Verstorbenen aus jener Geburtszeit, von der Sterbezeit 1820 bis 1838; (Hauptgesammtheit);

plus den Verstorbenen aus jener Geburtszeit, von der Sterbezeit 1838 (wo die Erfüllung des Alters 30 für diese Generation beginnt) bis zum Alter 30; (besondre Nebengesammtheit).

Im nächsten Capitel kehren wir noch einmal zu den Hauptgesammtheiten der Verstorbenen zurück, um auch sie mit Hilfe der soeben gefundenen besonderen Nebengesammtheiten zu zerlegen.

Siebentes Capitel.

Zerlegung der Hauptgesammtheiten.

Jede der Hauptgesammtheiten lässt sich ähnlich zerlegen, wie es für die Nebengesammtheiten gezeigt wurde, aber nicht in zwei sondern in drei Theile, und nicht auf zweierlei Weise, sondern nur auf eine Weise; und zwar in:

eine besondere Nebengesammtheit der ersten Art,
eine der beiden andern Hauptgesammtheiten
und eine besondere Nebengesammtheit der zweiten Art.

Erstens: die Gesammtheit der x' bis x''jährig Verstorbenen, die aus der Geburtszeit t_0' bis t_0'' herrühren, soll zerlegt werden. Es sind hier und bei jeder folgenden Hauptgesammtheit zwei Fälle zu unterscheiden; nämlich: Wenn $x'' - x' > t_0'' - t_0'$, also auch $t_0' + x'' > t_0'' + x'$, so ist die Gesammtheit identisch:

den Verstorbenen aus derselben Geburtszeit vom Alter x' bis zur Zeit $t_0'' + x'$, das heisst bis zum Ende der Erfüllungszeit dieses Alters (besondere Nebengesammtheiten zweiter Art);

plus: den Verstorbenen aus derselben Geburtszeit, von der Sterbezeit $t_0'' + x'$ bis $t_0' + x''$ d. h. vom Ende der Erfüllungszeit des Alters x' bis zum Anfang der Erfüllungszeit des Alters x'' (Hauptgesammtheit);

plus: den Verstorbenen aus derselben Geburtszeit von der Sterbezeit $t_0' + x''$ d. h. vom Anfang der Erfüllungszeit des Alters x'' bis zum Alter x'' (besondre Nebengesammtheit der ersten Art). Vergl. Fig. 5.

Hat man dagegen $t_0''-t_0'>x''-x'$, also $t_0''+x'>t_0'+x''$ so ist die Gesammtheit identisch:

den Verstorbenen vom Alter x' bis zur Zeit $t_0'+x''$ d. h. bis zum Ende der Erfüllungszeit des Alters x', die geboren sind von t_0' bis $t_0'+x''-x'$ (besondre Nebengesammtheiten der zweiten Art);

plus den Verstorbenen des Alters x'' bis x' aus der Sterbezeit $t_0'+x''$ bis $t_0''+x'$ (Hauptgesammtheit);

plus den Verstorbenen, geboren von $t_0''+x'-x''$ bis t_0'', von der Sterbezeit $t_0''+x'$ d. h. vom Anfang der Erfüllung des Alters x'' für diese Generation bis zum Alter x'' (besondre Nebengesammtheit der ersten Art). Vergl. Fig. 6.

Zweitens. Die Gesammtheit der von t' bis t'' aus der Geburtszeit t_0' bis t_0'' verstorbenen soll zerlegt werden.

Wenn $t''-t'>t_0''-t_0'$ also auch $t''-t_0''>t'-t_0'$ so ist diese Gesammtheit identisch:

den Verstorbenen derselben Geburtszeit, von der Sterbezeit t' d. h. vom Anfang der Erfüllungszeit des Alters $t'-t_0'$ bis zum Alter $t'-t_0'$ (besondre Nebengesammtheit der ersten Art);

plus: den Verstorbenen aus derselben Geburtszeit vom Alter $t'-t_0'$ bis zum Alter $t''-t_0''$ (Hauptgesammtheit);

plus: den Verstorbenen aus derselben Geburtszeit vom Alter $t''-t_0''$ bis zur Zeit t'' d. h. bis zum Ende der Erfüllungszeit (besondre Nebengesammtheit der zweiten Art). Vergl. Fig. 7.

Wenn dagegen $t_0''-t_0'>t''-t'$, also auch $t'-t_0'>t''-t_0''$ so ist die Gesammtheit identisch:

den Verstorbenen aus der Geburtszeit t_0' bis $t''-(t'-t_0')$ vom Alter $t'-t_0'$ bis zur Zeit t'' d. h. bis zum Ende der Erfüllungszeit des Alters $t'-t_0'$ für diese Generation (besondre Nebengesammtheit der zweiten Art);

plus: den Verstorbenen des Alters $t'-t_0'$ bis zum Alter $t''-t_0''$, aus der Sterbezeit t' bis t'' (Hauptgesammtheit);

plus: den Verstorbenen aus der Geburtszeit $t'-(t''-t_0'')$ bis t_0'', von der Sterbezeit t' d. h. vom Anfang der Erfüllung des Alters $t''-t_0''$ für diese Generation bis zum Alter $t''-t_0''$ (besondre Nebengesammtheit der ersten Art). Vergl. Fig. 8.

Drittens. Die Gesammtheit der x'' bis x'jährig von t' bis t'' verstorbenen lässt sich so zerlegen:

Wenn $t''-t'>x''-x'$, also auch $t''-x''>t'-x'$, so ist die Gesammtheit identisch:

den Verstorbenen aus der Geburtszeit $t'-x''$ bis $t'-x'$, von der Sterbezeit t' d. h. vom Anfang der Erfüllung des Alters x'' für diese Generation bis zum Alter x'' (besondre Nebengesammtheit der ersten Art);

plus: den x'' bis x'jährig Verstorbenen aus der Geburtszeit $t'-x'$ bis $t''-x''$ (Hauptgesammtheit);

plus: den Verstorbenen aus der Geburtszeit $t''-x''$ bis $t''-x'$, vom Alter x'

bis zur Sterbezeit t'' d. h. bis zum Ende der Erfüllungszeit des Alters x' für diese Generation (besondre Nebengesammtheit der zweiten Art). Vergl. Fig. 9.

Wenn hingegen $x''-x'>t''-t'$, also $t'-x'>t''-x''$, so ist die Gesammtheit identisch:

den Verstorbenen, stammend aus der Geburtszeit $t'-x''$ bis $t''-x''$, von der Sterbezeit t' d. h. vom Anfang der Erfüllung des Alters x'' für diese Generation bis zum Alter x'' (besondre Nebengesammtheit der ersten Art);

plus: den Verstorbenen aus der Geburtszeit $t''-x''$ bis $t'-x'$, von der Sterbezeit t' bis t'' (Hauptgesammtheit);

plus: den Verstorbenen aus der Geburtszeit $t'-x'$ bis $t''-x'$, vom Alter x' bis zur Sterbezeit t'' d. h. bis zum Ende der Erfüllung des Alters x' für diese Generation (besondre Nebengesammtheit der zweiten Art). Vergl. Fig. 10.

Den geometrischen Beweis für diese Zerlegungen kann man aus der jedesmal beigezogenen Figur auf dieselbe Weise führen, wie es am Ende des vorigen Capitels geschah.

Analytisch beweist man diese Zerlegung so: für jede der drei Gesammtheiten, deren Summe gleich der zu zerlegenden Gesammtheit sein soll, stellt man die Gleichung auf, worin die Gesammtheit der Verstorbenen auf die Gesammtheiten von Lebenden zurückgeführt wird. Addirt man die drei Gleichungen, so sind die dann erscheinenden Lebenden dieselben, durch welche auch die zu zerlegende Gesammtheit von Verstorbenen ausgedrückt werden kann. Es wäre zu weitläufig, darauf näher einzugehen und unnöthig, denn es kommt nichts neues dabei vor. —

Viel einfacher noch wird die Zerlegung jeder Hauptgesammtheit, wenn die zwei Strecken (des Alters und der Geburtszeit, oder der Geburtszeit und der Sterbezeit, oder der Sterbezeit und des Alters), wodurch die Hauptgesammtheit bestimmt wird, gleich lang sind. Dann kann die Hauptgesammtheit dargestellt werden als die Summe aus einer besondern Nebengesammtheit der ersten Art und einer solchen der zweiten Art, während die bei der Zerlegung sonst erscheinende Hauptgesammtheit gleich Null wird, weil eine der sie bestimmenden Strecken die Dauer 0 hat.

Die drei Hauptgesammtheiten lassen sich also dann so zerlegen, dass die Bestandtheile einer jeden mit denen der andern in Beziehung gesetzt werden können.

Es folgt daraus die Einrichtung eines Formulars, welches, während es zur Erhebung von besondern Nebengesammtheiten der ersten und zweiten Art dient, zugleich die Nachweisung aller drei Hauptgesammtheiten gestattet durch verschiedenes Zusammenlegen der besondern Nebengesammtheiten. Wegen dieses nicht unwichtigen Umstandes soll die Zerlegung der durch gleichlange Strecken bestimmten Hauptgesammtheiten etwas eingehender behandelt werden.

Um wieder mit den x' bis x''jährig verstorbenen aus der Geburtszeit t_0' bis t_0'' zu beginnen, so hat man, wenn $x''-x' = t_0''-t_0'$ (also auch $t_0'+x'' = t_0''+x'$):

$$
{}^{t_0''}_{t_0'}M^{t_0+x''}_{t_0+x'} = \left\{ \begin{array}{l} \int\limits_{t_0'}^{t_0''} F'(t_0).\left\{f(t_0'+x''-t_0)-f(x'')\right\}dt_0 = {}^{t_0''}_{t_0'}I^{t_0+x''}_{t_0+x'} \\ +\int\limits_{t_0'}^{t_0''} F'(t_0).\left\{f(x')-f(t_0''+x'-t_0)\right\}dt_0 = {}^{t_0''}_{t_0'}II^{t_0+x''}_{t_0+x'} \end{array} \right\} \quad \ldots\ldots 40
$$

Durch I bezeichnen wir die besondere Nebengesammtheit erster Art, durch II diejenige zweiter Art, und deuten durch die Indices die Hauptgesammtheit an, aus deren Zerlegung die besondern Nebengesammtheiten herrühren. Wenn man bedenkt, dass $t_0'+x'' = t_0''+x' = \frac{1}{2}\{t_0'+x'+t_0''+x''\} = \frac{1}{2}\{\tau'+\tau''\}$ (vergl. Seite 31), so sieht man, dass $t_0'+x''$ derjenige Zeitpunct ist, durch welchen die Zeitstrecke, in der die Verstorbenen der Hauptgesammtheit liegen, in zwei gleiche Theile getheilt wird. Es bedeutet also hier das I (die Indices wie oben): diejenigen von den Verstorbenen der Hauptgesammtheit, welche in der späteren Hälfte der Zeitstrecke liegen, in der die Verstorbenen der Hauptgesammtheit enthalten sind; und das II: die Verstorbenen aus der früheren Hälfte derselben Zeitstrecke.

Gehen wir nun zu den Verstorbenen zwischen t' und t'' aus der Geburtszeit t_0' bis t_0'' über, so hat man, wenn $t_0''-t_0' = t''-t'$, also $t''-t_0'' = t'-t_0'$, folgende Zerlegung:

$$
{}^{t_0''}_{t_0'}M^{t''}_{t'} = \left\{ \begin{array}{l} \int\limits_{t_0'}^{t_0''} F'(t_0).\left\{f(t'-t_0)-f(t''-t_0'')\right\}dt_0 \quad = {}^{t_0''}_{t_0'}I^{t''}_{t'} \\ +\int\limits_{t_0'}^{t_0''} F'(t_0).\left\{f(t'-t_0')-f(t''-t_0)\right\}dt_0 \quad = {}^{t_0''}_{t_0'}II^{t''}_{t'} \end{array} \right\} \quad \ldots\ldots 41
$$

Hier hat man $t''-t_0'' = t'-t_0' = \frac{1}{2}\{t'-t_0''+t''-t_0'\} = \frac{1}{2}\{\xi'+\xi''\}$ also enthält I diejenigen Verstorbenen aus der Hauptgesammtheit, welche noch nicht die Mitte zwischen den möglichen Altersgrenzen erreicht hatten; und II diejenigen, welche die Mitte schon überschritten hatten.

Endlich die Verstorbenen des Alters x'' bis x' aus der Sterbezeit t' bis t''; wenn $t''-t' = x''-x$, also auch $t''-x'' = t'-x'$, so ist folgende Zerlegung möglich:

$$
{}^{t-x'}_{t-x''}M^{t''}_{t'} = \left\{ \begin{array}{l} \int\limits_{t_0=t'-x''}^{t_0=t''-x''} F'(t_0).\left\{f(t'-t_0)-f(x'')\right\}dt_0 \quad = {}^{t-x'}_{t-x''}I^{t''}_{t'} \\ +\int\limits_{t_0=t'-x'}^{t_0=t''-x'} F'(t_0).\left\{f(x')-f(t''-t_0)\right\}dt_0 \quad = {}^{t-x'}_{t-x''}II^{t''}_{t'} \end{array} \right\} \quad \ldots\ldots 42
$$

Hier ist $t''-x'' = t'-x' = \frac{1}{2}\{t'-x''+t''-x'\} = \frac{1}{2}\{\tau_0'+\tau_0''\}$, also enthält I diejenigen Verstorbenen der Hauptgesammtheit, welche aus der früheren Hälfte der Strecke der Geburtszeit herrühren, und II diejenigen, die aus der spätern Hälfte der Geburtszeit stammen. —

Vergleicht man nun die Gleichungen 40., 41. und 42. unter einander, so findet man:

$$ {}_{t_0'}^{t_0''}I_{t_0+x'}^{t_0+x''} = {}_{t_0'}^{t_0''}I_{t'}^{t''} = {}_{t-x''}^{t-x'}I_{t'}^{t''} \quad \text{wenn man setzt: } \begin{cases} t' = t_0'+x'' \\ t'' = t_0''+x'' \end{cases} \text{ und} $$

$$ {}_{t_0'}^{t_0''}II_{t_0+x'}^{t_0+x''} = {}_{t_0'}^{t_0''}II_{t'}^{t''} = {}_{t-x''}^{t-x'}II_{t'}^{t''} \quad \text{wenn man setzt: } \begin{cases} t' = t_0'+x' \\ t'' = t_0''+x' \end{cases} $$

Das heisst die Verstorbenen aus der Hauptgesammtheit ${}_{t_0'}^{t_0''}M_{t_0+x'}^{t_0+x''}$, welche in der *spätern* Hälfte der Sterbezeit liegen,

sind identisch den Verstorbenen aus derselben Generation, von der Sterbezeit $t'=t_0'+x''$ bis $t''=t_0''+x''$, welche noch nicht die Mitte zwischen den möglichen Altersgrenzen erreicht haben;

sind ferner identisch den Verstorbenen vom Alter x'' bis x' aus der Sterbezeit $t' = t_0'+x''$ bis $t'' = t_0''+x''$, welche aus der früheren Hälfte der Geburtsstrecke herrühren.

Dagegen andrerseits: die Verstorbenen aus jener Hauptgesammtheit, welche in der *früheren* Hälfte der Sterbezeit liegen,

sind identisch den Verstorbenen aus derselben Generation, von der Sterbezeit $t' = t_0'+x' = t_0''+x''$ bis $t'' = t_0''+x'$, welche die Mitte zwischen den möglichen Altersgrenzen überschritten haben;

sind ferner identisch: den Verstorbenen vom Alter x'' bis x', der Sterbezeit $t' = t_0'+x' = t_0''+x''$ bis $t'' = t_0''+x'$, welche aus der spätern Hälfte der Geburtsstrecke stammen (vergl. in Fig. 17., 18. und 19. die graphische Darstellung dieser drei identischen besondern Nebengesammtheiten durch $[AB]$—$[BC]$). —

Hieraus folgt, als das praktisch Verwerthbare: wenn man, wie in Preussen, die Gesammtheit der von t' bis t'' verstorbenen, welche aus der gleich langen Strecke der Geburtszeit t_0' bis t_0'' stammen, erhebt; und zwar für mehrere gleichlange, auf einander folgende Sterbeperioden und Geburtsperioden: so braucht man jede so erhaltene Gesammtheit nur noch zu theilen nach denjenigen Verstorbenen, welche die Mitte zwischen den Grenzen des möglichen Alters erreicht haben und nicht erreicht haben. Ist diese Theilung geschehen, so kann man aus den erhaltenen Theilen nach Anleitung des obigen zusammensetzen: erstens die Gesammtheit der x'' bis x'jährig von t' bis t'' verstorbenen; zweitens: *die Gesammtheit der x' bis x''jährig aus einer Generation verstorbenen.*

Ferner: wenn man, wie in Sachsen, die Gesammtheit der x'' bis x'jährig verstorbenen der Sterbezeit t' bis t'' (deren Dauer gleich dem Spielraum des Alters) erhebt, und zwar für mehrere gleichlange, aneinanderliegende Strecken der Sterbezeit und des Alters; so braucht man die erhaltenen Gesammtheiten nur noch zu theilen nach den Verstorbenen, die der ersten resp. zweiten Hälfte

der Geburtsstrecke angehören. Aus den so erhaltenen Theilen kann man zusammensetzen: erstens die Gesammtheiten der von t' bis t'' verstorbenen aus der Geburtszeit t_0' bis t_0''; zweitens: die x' bis x''jährig verstorbenen aus der Geburtszeit t_0' bis t_0'', nach Anleitung des vorhergehenden.

Wir haben im früheren fortwährend darauf hingewiesen, dass zur directen Erforschung der Sterblichkeit es sich nur eignet, wenn man die Verstorbenen einer bestimmten Generation zwischen bestimmten Grenzen des Alters, also die Gesammtheit ${}_{t_0'}^{t_0''}M_{t_0+x'}^{t_0+x''}$, nachweist; dass es aber von der praktischen Statistik nirgends geschehe, da sie ein Interesse hat, die Auszüge nach einjährigen Sterbeperioden abzuschliessen, während doch die Verstorbenen aus einer einjährigen Generation und einjährigen Altersclasse — die man nachweisen sollte — nicht in einer einjährigen, sondern in einer zweijährigen Sterbeperiode liegen. Der oben geführte Beweis zeigt nun den Weg, wie man beide Interessen vereinigen kann: dadurch nämlich, dass man die Gesammtheiten von Verstorbenen, welche wegen der einjährigen Sterbeperiode von der praktischen Statistik vorgezogen werden, in zweckmässiger Weise zertheilt. —

Die Entwicklung, welche uns zu diesem Ergebniss geführt hat, ist wegen ihrer Allgemeinheit nicht gerade einfach zu nennen. Sie konnte nur geschehen auf Grund der bisher nicht benutzten analytischen Darstellung der Gesammtheiten und nach Einführung keiner kleinen Zahl von neuen technischen Ausdrücken. Das Ergebniss selber dagegen ist so ausserordentlich einleuchtend, dass man sich vielleicht wundert, wie einer darauf verfallen kann, es erst noch zu beweisen. Um zu zeigen, wie einleuchtend das Ergebniss ist, stellen wir folgendes Formular auf zur Erhebung zerlegter Hauptgesammtheiten:

Formular für das Erhebungsjahr 1864:

Unter den im Jahr 1864 verstorbenen befanden sich:

nach Altersclassen:	0—1jährige		1—2		2—3		3—4		4—5		5—6
darunter nach d. Geburtsjahr:	1864	1863	1863	1862	1862	1861	1861	1860	1860	1859	1859
(Name des Ortes)	1. II	2. I	3. II	4. I	5. II	6. I	7. II	8. I	9. II	10. I	11. II

Formular für das Erhebungsjahr 1865:

Unter den im Jahr 1865 verstorbenen befanden sich:

nach Altersclassen:	0—1jährige		1—2		2—3		3—4		4—5		5—6	
darunter n. d. Geb.jahr:	1865	1864	1864	1863	1863	1862	1862	1861	1861	1860	1860	1859
(Name des Ortes)	1. II	2. I	3. II	4. I	5. II	6. I	7. II	8. I	9. II	10. I	11. II	12. I

Man kann es auffassen als das Formular für die in Sachsen üblichen Erhebungen über Verstorbene (einjährige Altersclassen, einjährige Strecken der Sterbezeit), worin man für jede Gesammtheit (z. B. für die 1—0jährig Verstorbenen des Jahres 1864) berechnet hat, aus welcher Strecke der Geburtszeit sie stammen (nämlich aus den Geburtsjahren 1864 und 1863), und geschieden nach denjenigen, welche aus der spätern Hälfte der Geburtszeit und aus der früheren Hälfte herrühren (aus dem Jahr 1864 resp. aus dem Jahr 1863);
oder man kann es auch als das Formular für die in Preussen üblichen Erhebungen ansehen (einjährige Generationen, einjährige Strecken der Sterbezeit) worin für jede Gesammtheit (z. B. für die im Jahr 1864 Verstorbenen aus dem Geburtsjahr 1863) berechnet ist, zwischen welchen Altersgrenzen sie sich befinden (nämlich zwischen dem Alter 0 und 2); und nun geschieden nach denen, welche die Mitte der Altersgrenzen (also das Alter 1) noch nicht erreicht oder schon überschritten haben.

Durch I resp. II ist in jeder Spalte angedeutet, welcher Art die darin enthaltene Nebengesammtheit ist, die aus der Zerlegung hervorgeht.

Nichts ist klarer, als dass man aus diesem Formular, wenn die Spalten ausgefüllt wären, auch die Verstorbenen einjähriger Altersclassen aus einjährigen Generationen finden kann. Z. B. die 1—2jährig verstorbenen aus dem Geburtsjahr 1863, durch Addition des Inhalts der Spalte 3. im Formular für das Sterbejahr 1864 und der Spalte 4. im Formular für das Sterbejahr 1865. In andern als diesen beiden Sterbejahren können die Verstorbenen dieser Gesammtheit nicht liegen.

Die Spalte 3. (des Formulars für 1864) enthält diejenigen 1—2jährig aus der Generation von 1863 verstorbenen, welche in der ersten Hälfte der Sterbezeit liegen und zwar deshalb, weil sie enthält: die Verstorbenen aus derselben Generation, aus der Sterbezeit $t' = 1862+1$ bis $t'' = 1863+1$, also aus dem Kalenderjahr 1864, welche die Mitte der Altersgrenzen $1864—1862 = 2$ und $1863—1863 = 0$, also das Alter 1 schon überschritten haben; oder auch deshalb, weil diese Spalte enthält: die 2—1jährig verstorbenen aus der Sterbezeit $t' = 1862+1$ bis $t'' = 1863+1$, also aus dem Kalenderjahr 1864, welche aus der spätern Hälfte der Geburtsstrecke stammen, also im Kalenderjahr 1863 geboren sind, denn die Geburtsstrecke umfasst die Kalenderjahre 1862 und 1863. Dass diese dreifache Auslegung des Inhalts der Spalte 3. identisch sein muss, ist oben ganz allgemein bewiesen und zeigt sich hier aufs deutlichste. Aehnlich Spalte 4. (des Formulars für 1865).

Wenn von der praktischen Statistik Erhebungen über Verstorbene nur im allgemeinen (und nicht zu einem bestimmten Zweck, zu einer speziellen Untersuchung) verlangt werden — und das ist meistens der Fall — so würde sich das oben abgedruckte Formular mehr als irgend eine andres empfehlen. Denn es erlaubt auf einmal nachzuweisen: Erstens, welche Verluste jede einjährige Generation während je eines Sterbejahrs erleidet; eine Frage, die an sich von

Interesse ist, so sehr dass sich die preussischen Erhebungen ganz allein darauf erstrecken. Zweitens: wie sich die Verstorbenen jedes Sterbejahrs nach einjährigen Altersclassen vertheilen; das Interesse dieser Frage ist so gross, dass ihr die Erhebungen fast aller Länder angepasst werden. Drittens: wie viele aus jeder Generation, das heisst aus den Gebornen je eines Kalenderjahrs, zwischen zwei Puncten des Alters sterben; letzteres weitaus die wichtigste Erhebung, denn man lernt daraus allein direct die Sterblichkeit nach dem Alter kennen.

Angenommen ein solches Formular wäre eingeführt, so würde es nach der Benutzung in zwei aufeinander folgenden Kalenderjahren das Material bieten, um die Sterblichkeit für jede einjährige Altersstufe von 0 an zu berechnen, wenn die Geburtsregister nachzuweisen erlauben, wie gross die Generation jedes Kalenderjahres war. Es ist einer der landläufigsten Irrthümer, zu glauben, man erhalte schon nach Ausfüllung irgend eines Formulars für ein Sterbejahr das Material, dessen man bedarf, nämlich die Verstorbenen einer einjährigen Generation und einjährigen Altersclasse. Die Sterblichkeit jeder Altersstufe würde freilich aus Material berechnet, das jedesmal einer andern Generation entnommen wäre.

Um die Sterblichkeit nach dem Alter aus Material zu berechnen, das nur einer und derselben Jahresgeneration entnommen ist, muss das Formular während $\omega + 1$ Sterbejahren benutzt werden.

Wenn man die in Preussen oder die in Sachsen üblichen Erhebungen, die sich mit diesem Formular gleichfalls erreichen lassen, fortsetzt, ohne von diesem Formular Gebrauch zu machen; das heisst fortsetzt ohne die zweckmässige Theilung, Zerlegung, Spaltung der Gesammtheiten, so ist eine directe Ermittlung der Sterblichkeit nach dem Alter, das heisst der Absterbeordnung, vollkommen unmöglich, und wenn jene Erhebungen Jahrhunderte lang fortgesetzt würden. Denn das Material, welches man dann schafft, ist begrifflich verschieden von dem Material, das man braucht; und eine begriffliche Verschiedenheit kann selbst durch Fülle bis zum Uebermass niemals ausgeglichen werden. Kein Vorurtheil ist so entwürdigend, als das, zu glauben, man könne Verwechslung der Begriffe, also Denkfehler, wieder gutmachen durch Masse des Materials — blos weil man einmal gehört hat, unter massenhaftem Material verschwänden gewisse zufällige Einwirkungen.

Es ist wohl zu beachten, dass hier von der directen Ermittlung der Absterbeordnung die Rede ist: das heisst von derjenigen Ermittlung, die sich jeder Voraussetzung über Geburtendichtigkeit und über die Eigenschaften der Absterbeordnung enthält. Eine indirecte Erforschung der Sterblichkeit lässt auch jenes Material zu, davon soll aber erst im zweiten Abschnitt dieser Abhandlung gesprochen werden.

Achtes Capitel.

Rückblick. Literatur. Gleichniss für die Vorgänge auf einem bevölkerten Gebiet.

Es war die Aufgabe dieses Theils der Abhandlung, an dessen Schluss wir nun angelangt sind, die begrifflichen Eigenschaften der verschiedenen Gesammtheiten von Lebenden und Verstorbenen für ein Gebiet mit stätiger Geburtenvertheilung darzustellen. Das vorgesteckte Ziel ist offenbar erreicht. Es genügt ein Blick auf die gewonnenen Gleichungen, um die wesentliche Verschiedenheit der gleichaltrig Lebenden von den gleichzeitig Lebenden zu erkennen, oder die Verschiedenheit der Verstorbenen, je nachdem sie bestimmt werden nach Alter und Geburtszeit, nach Geburtszeit und Sterbezeit, nach Sterbezeit und Alter; und eine graphische Darstellung ist gefunden, die dasselbe für die Anschauung bietet, was die Gleichungen für die Einsicht darbieten. Es sind Sätze von der allgemeinsten Gültigkeit gewonnen, die man bisher auf Tritt und Schritt vermisst, aus deren Mangel sich der unsägliche Wirrwarr dieser Disciplin erklärt, die Unsicherheit derjenigen, die das Material der Bevölkerungsstatistik verarbeiten, die Rathlosigkeit derjenigen, die solche Verarbeitungen beurtheilen. Die Sätze sind von der allgemeinsten Gültigkeit, weil nur die allgemeinsten, nur die nothwendigen Eigenschaften einer Geburtenfolge und einer Absterbeordnung ihnen zu Grunde liegen; sie sind nicht nur gefunden, sie sind auch methodisch gefunden: es ist nicht getastet und zufällig ertappt, es ist vielmehr das Mittel gegeben, auf jede Frage eine Antwort zu erzwingen. Das Mittel der analytischen Darstellung, ich gebe es zu, ist für manche leichtere Fragen ein etwas umständliches; es können manche Sätze einfacher entwickelt werden. Dafür aber bietet es bei schwierigeren, bisher unlösbaren Fragen einen Ersatz der Art, dass man behaupten kann, die Unterscheidung in leichtere und schwierigere Fragen habe aufgehört. Die so aufgefundenen Sätze sind so einfach, dass man sie nur in Worte zu übersetzen braucht, um ihre Richtigkeit ohne weiteres einzusehen.

Zugleich sieht man aufs deutlichste, welche Gesammtheiten sich dazu eignen, direct die Absterbeordnung zu finden, aus der sich die Vorgänge der Verminderung erklären lassen: es sind nur die Erhebungen über Verstorbene aus einer fest begrenzten Geburtszeit nach dem Alter. Denn Erhebungen über Lebende, die man auch verwenden könnte, fehlen der Bevölkerungsstatistik, und die Erhebungen über Verstorbene aus einer fest begrenzten Sterbezeit nach dem Alter, bedürfen Ergänzungen, die zwar möglich, aber aus praktischen Gründen nicht hinreichend verlässig sind. Es ist zum Schluss gezeigt, gleichsam um an die Praxis wieder anzuknüpfen, nach welchem Formular die Er-

hebungen stattfinden können, wenn zu gleicher Zeit für die Erforschung der Sterblichkeit und für die übrigen Interessen der Bevölkerungsstatistik gesorgt sein soll. —

Die Untersuchung, die uns im ersten Theile beschäftigte, hat eigentlich keine Literatur. Es ist, soviel ich weiss, nirgends die Frage nach den begrifflichen Eigenschaften der Gesammtheiten von Lebenden und Sterbenden auf einem Gebiet mit stätiger Geburtenfolge aufgeworfen. Es war sogar nöthig, die technischen Ausdrücke „Gesammtheit,“ „stätige Geburtenfolge“ und „begriffliche Eigenschaft“ neu einzuführen. Die Bevölkerungsstatistik ist nämlich so sehr beschäftigt mit der empirischen Berechnung von Quotienten, dass sie darüber ganz vergisst zu fragen, was denn die Grössen, woraus sie ihre Quotienten bildet, eigentlich bedeuten. Es ist ihr häufig nur darum zu thun, dass gerechnet wird, weniger darum, dass berechnet wird, am wenigsten darum, was berechnet wird. Sie hat sich davon entwöhnt, zuerst sich klar zu werden, was man untersuchen will, und es fehlt ihr deshalb so vielfach der Trieb zu fragen, welche Bedeutung diese oder jene Grösse für die Untersuchung hat. Und wenn auch die Frage entsteht, so fehlt vielfach die Uebung der Phantasie, wodurch allein die Vorgänge auf einem bevölkerten Gebiet so scharf erfasst werden können, dass man die Bedeutung der so oder so entstandenen Grössen erkennt, und gänzlich fehlt ein Mittel, das erkannte mit hinreichender Allgemeinheit darzustellen.

Indessen hat man doch schon ziemlich deutlich auf das Bedürfniss einer so allgemeinen Untersuchung gelegentlich hingewiesen und manche ihrer Ergebnisse vorweggenommen; das wichtigste davon sei hier angeführt.

Dass die Bevölkerungsstatistik einer mathematischen Behandlung, einer mathematischen Theorie bedürfe, hat Dr. Heym in der Rundschau, Zeitschrift für das Versicherungswesen, unermüdlich den Statistikern ins Gedächtniss gerufen (z. B. im Jahrgang 1862 „Ein Mahnruf an die Statistiker“) und Dr. Wittstein sagt ähnlich (in der Zeitschrift des k. pr. stat. Bureaus 1863, Nr. 1):

„Die Statistik hat bisher, und zwar sehr zu ihrem Schaden, die Beihilfe der „Mathematik so gut als gänzlich verschmäht.“ „Erst durch Verbindung mit der „Mathematik wird die Statistik zu einer Wissenschaft in der vollen Bedeutung „des Wortes emporwachsen.“

Der Verfasser bekennt gern, dass es hauptsächlich diese Mahnrufe waren, die ihm den Muth gaben, den Versuch zu wagen. Die Aufgabe selbst, die durch eine solche Theorie zu lösen wäre, ist dort nicht näher angedeutet, es ist nur erkannt, dass das Lösungsmittel die Mathematik sein werde. Wohl aber ist sie, wenn auch dunkel, schon angedeutet in folgender Stelle eines ungenannten Kritikers (Hildebrands Jahrbücher für Nat. Oek. und Statistik. 1863, Seite 619): „Nach meiner Ansicht sind überhaupt die Untersuchungen (über Sterblich- „keit) soweit vorgeschritten, dass die Erfahrung ein hinlängliches Material zu „einer aprioristischen Behandlung der Probleme darbietet. Diese wird nicht.

„nur alle Zahlen aufstellen, sondern auch die Abhängigkeit derselben bestim-„men. Ohne diese Relationen wird man weder Dunkelheit noch Unvollständig-„keit vermeiden können.“

Hier schwebt dem Verfasser der Stelle offenbar das Bedürfniss vor, die Abhängigkeit der verschiedenen Gesammtheiten der Lebenden und Verstorbenen (er nennt sie „Zahlen,“ weil der technische Ausdruck fehlt) dargestellt zu sehen, doch ist nicht gesagt welche Abhängigkeit, und insbesondere fehlt der Begriff der Geburtenfolge. Und wenn er von aprioristischer Behandlung spricht, so meint er vielleicht die begrifflichen Eigenschaften der Gesammtheiten. So dunkel die Andeutung ist, so hat sie mich doch als die deutlichste überrascht, die ich in den hieher gehörigen Schriften auffinden konnte.

Um auf die Ergebnisse selber zu kommen, so ist schon vorn im Text erwähnt, dass man den Zusammenhang zwischen den Lebenden und Verstorbenen allgemein kennt, wo es sich um Verstorbene handelt, die, aus einer festen Generation stammend, zwischen zwei Puncten des Alters sich befinden, sowie auch derjenigen Verstorbenen, die, aus einer festen Generation stammend, zwischen zwei Puntcen der Sterbezeit liegen.

Die wesentliche Verschiedenheit zweier Hauptgesammtheiten von Verstorbenen wird am deutlichsten von Dr. G. Meyer in Jena besprochen (Hildebrands Jahrbücher 1867, Bd. I. „Die mittlere Lebensdauer“); wir geben die Stelle, die uns nachträglich bekannt wurde, zugleich als Beispiel, wie schwerfällig wegen des Mangels an technischen Ausdrücken die Behandlung dieser Fragen ist; es heisst dort Seite 18: „Die Verfasser (von Untersuchungen über „Sterblichkeit nach dem Alter; gemeint sind Hermann und Engel) nehmen die „Gebornen eines Jahres und betrachten nun alle Personen, welche in diesem „Jahre im Alter unter einem Jahr sterben, als diejenigen, welche von jenen „Gebornen dem Tode vor Ablauf des ersten Lebensjahres unterlegen sind. Das „ist unrichtig. Dieselben können sowohl von den Gebornen dieses als des vor-„hergehenden Jahres herrühren, und andrerseits sterben von den Gebornen „dieses Jahres sehr viele erst im folgenden, aber doch vor Vollendung des ersten „Lebensjahrs.“ Hierin ist an einem Beispiel gezeigt: dass die x' bis x''jährig Verstorbenen aus der Geburtszeit t_0' bis t_0'' in einer Strecke der Sterbezeit liegen, welche die Dauer $t_0''-t_0'+x''-x'$ hat; dass die x'' bis x'jährig von t' bis t'' Verstorbenen aus einer Strecke der Geburtszeit herrühren, welche die Dauer $x''-x'+t''-t'$ hat; und dass die eine Gesammtheit von der andern wesentlich verschieden ist. Es heisst dort weiter: „Man muss beide Momente, das „Geburtsjahr und das Altersjahr, zugleich im Auge behalten.“ Das heisst man muss in der That das Absterben der einzelnen Jahresgenerationen nach dem Alter erheben. „Die Aufstellung der Tabellen über die Altersverhältnisse würde „dann so zu erfolgen haben, dass sie zunächst die Geburts-, und als Unterab-„theilung die Altersjahre enthielten. Die Tabelle für 1850 würde danach bei-„spielweise folgende Rubriken haben:

„Gestorbene nach dem Alter:
„1. Geboren im Jahre 1850.
„2. Geboren im Jahre 1849.
„ a) unter einem Jahre alt.
„ b) ein Jahr alt.
„3. Geboren im Jahre 1848.
„ a) ein Jahr alt.
„ b) zwei Jahre alt.

„Auf Grund solcher Tabellen liessen sich richtige Mortalitätstafeln sehr leicht „construiren. Man wüsste stets das Alter der gestorbenen Personen, wüsste „aber auch von den Gebornen welches Jahres sie in Abzug zu bringen wären." Es ist leicht zu erkennen, dass die von G. Meyer hier vorgeschlagene Einrichtung der Tabellenköpfe nicht wesentlich abweicht von der Einrichtung, die am Ende des vorigen Capitels gezeigt ist, und dass er diejenigen Erhebungen für allein zweckmässig hält für die Erforschung der Sterblichkeit, die auch wir empfehlen mussten. Sein Vorschlag ist ein praktischer Vorschlag, er gibt ihn in Form eines Beispiels ohne eine allgemeine Ableitung, während uns auf die allgemeine Ableitung alles ankam.

Fischer kommt auf den letzten Seiten seines Werkes „Grundzüge des Versicherungswesens, 1860," auf das Material zu sprechen, das von der Bevölkerungsstatistik geliefert wird und dessen Verarbeitung für Fragen der Sterblichkeit eigentlich nicht den Gegenstand seiner Untersuchungen bildet, um auf einige wichtige Umstände aufmerksam zu machen, die man bei der Verarbeitung solches Materials zu beachten habe. Er deutet nur an, dass vor der Benutzung noch manche Ueberlegungen nöthig seien, und aus den Beispielen, die er anführt, geht hervor, dass er sich mancher wesentlichen Verschiedenheiten bewusst ist, die zwischen den Gesammtheiten der Verstorbenen stattfinden. Doch geht er darauf, als auf einen ihm fernliegenden Gegenstand, nicht näher ein.

Auch Heym (vergl. Zeitschrift des sächs. stat. Bureaus 1863 Nr. 11 und 12, Seite 142) gibt einige Andeutungen, die hierher gehören: er bemerkt nämlich, dass die Mitglieder einer Altersclasse zu einem gewissen Zeitpunct im Laufe der Zeit allmählich in eine höhere Altersclasse eintreten und legt Gewicht darauf, dass dieser Vorgang ein stätiger ist.

Fischer sowohl als Heym deuten an, dass sie diese Dinge näher untersuchen wollen, vermuthlich mit Hilfe einer mathematischen Darstellung, doch ist mir davon nichts bekannt geworden.

Es ist also einerseits das Bedürfniss nach einer Theorie, wie wir sie versucht haben, mehr oder weniger dunkel empfunden; andrerseits ein Theil der Resultate, an speziellen Fällen entwickelt, vorweggenommen; aber die Methode selbst finde ich nirgends angedeutet, vor allem nirgends den leisesten Wink, dass sich die allgemeinen Sätze gewinnen lassen durch Verbindung der Ab-

sterbeordnung mit der Geburtenfolge, wenn man die eine auffasst als Function der Zeit, die andre als Function des Alters und beide Functionen nur mit den nothwendigen, aus den Begriffen selbst hervorgehenden Eigenschaften ausstattet.

Wollte man, anstatt das anderswo richtig gefundene herauszuheben, vielmehr die Fehler und Irrthümer aufzählen, so wäre die Ausbeute reich genug; aber es ist nicht unser Zweck anzugreifen, sondern zu begründen. Noch dazu sind die Ansichten, die man bekämpfen müsste, immer in gelegentlichen Bemerkungen enthalten (da die Fragen, um die es sich handelt, niemals Gegenstand einer besonderen Untersuchung waren); und treten also mit so wenig Anspruch auf, dass sie sich wenig zu einer Widerlegung eignen. —

Bei der Entwicklung der Sätze in den sieben vorausgehenden Kapiteln, war es das Hauptbestreben, immer vom einfacheren zum weniger einfachen aufzusteigen, niemals den Weg der Analysis zu verlassen, die graphische Darstellung und die Beispiele stets nur als Erläuterung zu verwenden. In diesem Sinne schien es zweckmässig, die verschiedenen Gesammtheiten so abstrakt wie möglich entstehen zu lassen, nämlich, nachdem der Begriff der Gesammtheit erläutert war, durch Wahl der Integrationsgrenzen. Dadurch geht aber die Anschaulichkeit verloren, eine gewisse Zerrissenheit macht sich bemerklich insofern, als der Leser vielleicht das Gesammtbild der Vorgänge vermisst, die auf einem Gebiet mit stätiger Geburtenfolge stattfinden, und es sei daher erlaubt, ein solches zum Schluss, gleichsam als Rückblick, zu entwerfen.

Denken wir uns eine Quelle, die ohne Unterbrechung Wasser an die Oberfläche führt, jedoch bald reichlicher bald kärglicher fliessend. Sobald das Wasser aus der Quelle ausgetreten ist, werde es von einem Rinnsal aufgenommen und darin mit gleichförmiger Geschwindigkeit weiter bewegt, immer in derselben Richtung. Verlegen wir die Quelle in die Wüste, wo eine glühende Sonne das Wasser, sobald es aus Tageslicht kommt, auf seinem ganzen Laufe bescheint, erwärmt und verdunstet. Jedes Wassertheilchen soll unter diesem Einfluss stätig vermindert werden, und der Sonnenbrand sei so stark, dass nach einem Laufe von hundert Meilen jedes Wassertheilchen den Aggegratzustand verändert hat, und also kein Wasser mehr die Stellen des Rinnsals erreicht, die weiter als hundert Meilen von der Quelle entfernt sind.

Die Wassermenge, die zu irgend einem Zeitpunct aus der Quelle austritt, wird unter fortwährender Verminderung durch alle Stellen des Rinnsals geführt. An irgend einer Stelle des Rinnsals befinden sich in andern Augenblicken Wassertheile, die zu einem andern Zeitpunct aus der Quelle ausgetreten sind.

So treten auf ein Gebiet fortwährend neue Geborne hinzu, bald mit grösserer bald in kleinerer Dichtigkeit der Folge. Die Hinzugetretenen sind sofort der Verminderung durch Sterben unterworfen; sie werden, stets vermindert, zu immer höherem Alter geführt, bis sie bei einem höchsten Alter ganz verschwunden sind. Hält man einen Punct des Alters fest, so erreichen ihn in jedem neuen Zeitpunct Individuen, die zu einer andern Zeit geboren sind.

Die Sterblickheit nach dem Alter untersuchen — dem entspricht in unserm Gleichniss die Untersuchung: wie die Verminderung der Wassertheile mit dem zurückgelegten Weg vorschreitet. Der Zusammenhang zwischen der Verminderung jedes unendlich kleinen Theilchens und dem zurückgelegten Weg, welcher, wenn man ihn voraussetzt, die Abnahme endlicher Wassermengen bei ihrem Vorschreiten im Rinnsal erklärt — entspricht der Absterbeordnung, wie sie oben aufgefasst ist.

Die analytische Darstellung der so oder so bestimmten Gesammtheiten von Lebenden und Verstorbenen durch die Geburtenfolge und Absterbeordnung, hat ihr Ebenbild in der analytischen Darstellung der so oder so bestimmten Mengen des Wassers, wenn die Ergiebigkeit der Quelle als Function der Zeit und die Verminderung wegen des Verdunstens als Function des zurückgelegten Weges gedacht wird.

Die Gesammtheit derjenigen Lebenden, die, aus einer gewissen Strecke der Geburtszeit stammend, ein bestimmtes Alter erfüllen — und die Wassermenge, die, in einer gewissen Zeitstrecke ausgetreten, an einem Puncte des Rinnsals überhaupt irgendwann vorüberfliesst; die Gesammtheit derjenigen Lebenden, welche, aus einer gewissen Strecke der Geburtszeit stammend, einen bestimmten Zeitpunct erreichen — und die Wassermenge, die, in einer gewissen Zeitstrecke ausgetreten, zu einem besimmten Zeitpunct überhaupt irgendwo im Rinnsal noch vorhanden ist, entsprechen einander.

Die Menge der Individuen, die vom Alter 0 bis zum Alter ω zu einem bestimmten Zeitpunct auf dem Gebiete lebt, also die Volkszahl, entspricht der Wassermenge, die sich zu einem bestimmten Zeitpunkt in der Entfernung 0 bis 100 Meilen von der Quelle, das heisst im ganzen Rinnsal befindet.

Die Wassermenge, die zwischen den Puncten des Rinnsals in der Entfernung x' und x'' von der Quelle irgendwann verloren geht, von dem Wasser, das zur Zeit t_0' bis t_0'' ausgetreten war — entspricht der Gesammtheit von Verstorbenen, die wir zuerst besprachen. Der Verlust, den die von der Zeit t_0' bis t_0'' ausgeflossene Wassermenge irgendwo erleidet zwischen den Zeitpuncten t' und t'', entspricht der zweiten Gesammtheit der Verstorbenen. Die Wassermenge, welche, irgendwann ausgeflossen, zwischen den Puncten x'' und x' des Rinnsals von der Zeit t' bis t'' verloren geht, entspricht unsrer dritten Gesammtheit von Verstorbenen.

Wie das verlorne Wasser als die Differenz vorhandener Wassermengen sich darstellen lässt, so liessen sich die Gesammtheiten der Verstorbenen durch Gesammtheiten von Lebenden ausdrücken. —

Man kann sagen, dass die Sätze, die in den vorausgehenden Capiteln entwickelt sind, nichts andres als die Vorgänge in der Bevölkerung eines abgeschlossenen Gebietes schildern, (also auch die Vorgänge in der Bevölkerung der

ganzen Erde oder innerhalb der Menschheit) wenn das Individuum nur betrachtet wird, insofern es mit andern zusammengefasst gewisse Mengen, gewisse Gesammtheiten bildet.

Aus einem allgemeineren Gesichtspunkte dürfte sich das Individuum schwerlich betrachten lassen und man darf daher wohl sagen, das jene Sätze die allgemeinsten Vorgänge innerhalb der Menschheit darstellen. Aus dem Vergleich mit der Quelle, der oben (vielleicht etwas zu eingehend) durchgeführt ist, erkennt man, dass jene allgemeinsten Vorgänge innerhalb der Menschheit gar nichts eigenthümliches haben; dass sie vielmehr nur ein besondrer Fall aller derjenigen Vorgänge sind, die man unterscheiden kann, wo nur immer ein stätiges Hinzutreten von Grössen stattfindet, die nach ihrem Hinzutreten einer stätigen Verminderung unterliegen. Anstatt dass diese allgemeinsten Vorgänge von der Bevölkerungsstatistik zuerst und vor allem behandelt würden, sind sie vielmehr weit davon entfernt, hinreichend erkannt zu sein. Man hat nur eine ganz unklare Vorstellung davon, die sich in den Worten Generationswechsel, nächste Generation, Erneuerung des lebenden Geschlechts und ähnlichen Ausdrücken mehr verbirgt als ausspricht.*) Der Grund mag darin liegen, dass man, innerhalb der Bevölkerung stehend, nur schwer zu einem Ueberblick gelangt über Vorgänge, die noch dazu, um es kurz zu fassen, nicht räumlicher Natur, sondern blos zeitlicher Natur sind, sodass sie sich der Anschauung entziehen; dass viele darin eine Schwierigkeit finden, stätige Vorgänge zu erfassen; dass endlich die Darstellungsmittel für stätige Vorgänge nicht so sehr Gemeingut sind, als sie es bei denen sein sollten, die mit solchen Vorgängen zu thun haben.

---

*) Ich behaupte, dass die öffentliche Meinung gegenwärtig keine deutlichere Vorstellung von dem hat, was wir eben die allgemeinsten Vorgänge in einer Bevölkerung nannten (soweit von Abgängen und Zugängen die Rede ist) — als zur Zeit Homers. Man vergleiche Ilias I, 245, wo Nestor eingeführt wird; es heisst von ihm (250 fgg.):

τῷ δ' ἤδη δύο μὲν γενεαὶ μερόπων ἀνθρώπων	„Ihm waren schon zwei Mensehengeschlech-
ἐφθίαθ', οἵ οἱ πρόσθεν ἅμα τράφεν ἠδ' ἐγένοντο	„ter verschwunden, die mit ihm erzogen und
ἐν Πύλῳ ἠγαθέῃ, μετὰ δὲ τριτάτοισιν ἄνασσεν.	„geboren waren; er herrschte unter den „Dritten."

Homer scheint sich zu denken, und häufig geschieht das heute noch, als wenn die Menschengeschlechter sich wie Schildwachen ablösten. Er will sagen, dass Nestors Altersgenossen und die Altersgenossen seiner Söhne schon meistens verstorben sind, so dass er schon unter den erwachsenen Altersgenossen seiner Enkel lebt, und fingirt, des lebhafteren Bildes halber, als wenn alle Menschen entweder mit Nestor oder seinen Söhnen oder seinen Enkeln gleichzeitig geboren wären; als wenn zwischen Nestors Geburtszeit und der Geburtszeit seiner Söhne, sowie zwischen der letzteren und der Geburtszeit seiner Enkel gleichsam gar keine Geburten stattgefunden hätten. Ganz ähnlich liest man heute noch tagtäglich Redewendungen, welche bezeugen, dass man sich meistentheils den Ersatz der jetzt lebenden Menschen durch andere nicht als etwas stätiges, sondern als etwas plötzliches, auf dem Wege der Ablösung geschehendes vorstellt.

In der vorliegenden Arbeit wird man einen Theil desjenigen finden, was als „mathematische Behandlung der Bevölkerungsstatistik,“ als „theoretische Bevölkerungsstatistik“, als „analytische Statistik“ (Wittstein auf der Naturforscherversammlung in Hannover 1865) vielfach vermisst worden ist. An der Darstellungsweise wird man wohl manches zu tadeln haben; aber hat nicht der Statistiker genug gethan, wenn er zeigt, welche Fragen vorliegen und auf welchem Wege sie lösbar sind? Dass der Weg so glatt und eben sei, wie er sein könnte, ist wohl wünschenswerth, doch lässt sich nicht immer beides vereinigen. Es sind die Grundlagen der theoretischen Behandlung, welche nur von der Statistik gegeben werden können, und die der Statistiker geben will. Die Anforderungen einer möglichst einfachen Darstellung wird der Mathematiker besser befriedigen. Man wird also mit Nachsicht aufnehmen, was ohne Anmassung dargeboten wird.

ZWEITER ABSCHNITT.

Indirecte Ermittlung der Sterblichkeit.

Erstes Capitel.

Die gebräuchlichen Methoden für die Sterblichkeit nach dem Alter.

Der erste Abschnitt hatte die allgemeinen Sätze über die Gesammtheiten von Lebenden und Verstorbenen zu entwickeln und zugleich zu sagen, aus welchen Gesammtheiten die Sterblichkeit nach dem Alter direct, das heisst so gefunden werden kann, dass über die Natur der Geburtendichtigkeit und der Absterbeordnung gar keine Voraussetzung nöthig war. Es waren die Gesammtheiten der gleichaltrig Lebenden (Gleichung 1. u. 2) und von den Verstorbenen vor allem, die einer Altersclasse angehören und aus einer festen Generation stammen (Gleichung 5). Wenn aber Voraussetzungen über Geburtendichtigkeit und über die Beschaffenheit der Absterbeordnung zugelassen werden, so sind alle übrigen Hauptgesammtheiten zur näherungsweisen Aufsuchung der Sterblichkeit nach dem Alter mehr oder weniger geeignet. Es sollen nun in diesem zweiten Abschnitt die Voraussetzungen, deren man bedarf, näher untersucht werden. Wir gehen dabei in derselben Reihenfolge vor, wonach die Gesammtheiten im ersten Theil besprochen wurden — zuerst also die der Lebenden, welche hieher gehören, dann die der Verstorbenen. —

Die beiden Gesammtheiten der gleichzeitig Lebenden (Gleichung 3 u. 4) sind für unsern Zweck nicht wesentlich verschieden. Es ist daher nicht nöthig, jede von beiden besonders zu behandeln. Um mit den x'' bis x' jährig zur Zeit t lebenden zu beginnen (Gleichung 4), so hat man (vergl. Seite 24):

$$\overset{t-x'}{\underset{t-x''}{}} V(t) = \left\{ F(t-x') - F(t-x'') \right\} . f(x' + \vartheta' [x'' - x']),$$

wenn also die Zahl der x'' bis x' jährigen zur Zeit t getheilt wird durch die Zahl der Gebornen von $t_0 = t - x''$ bis $t_0 = t - x'$, so ist der Quotient gleich der Zahl derjenigen, die aus einer Einheit von Gebornen ein Alter erreichen, das zwischen x' und x'' liegt. Näher kann das Alter erst bestimmt werden durch Voraussetzungen über die Geburtendichtigkeit und Absterbeordnung.

Man nehme an, die Geburtendichtigkeit sei von $t_0 = t - x''$ bei $t_0 = t - x'$ constant; also

$$F'(t_0) = \frac{F(t-x') - F(t-x'')}{x''-x'}$$

und die Absterbeordnung zwischen x' und x'' so beschaffen dass

$$f(x) - f(x') = -\frac{f(x') - f(x'')}{x''-x'}(x-x')$$

das heisst dass die Ordinaten der Curve $f(x)$ dieselben sind wie die Ordinaten der Sehne, welche durch die Endpuncte der Ordinaten $f(x')$ und $f(x'')$ gelegt ist, so hat man:

$$\frac{t-x'}{t-x''}V(t) = \left\{F(t-x') - F(t-x'')\right\}.\, f(x' + \tfrac{1}{2}[x''-x']);$$

man erhält also, unter diesen Voraussetzungen, wenn die Zahl der x'' bis x'jährigen zur Zeit t dividirt wird durch die Zahl der Gebornen von $t-x''$ bis $t-x'$, die Zahl derjenigen, die aus einer Einheit Geborner das Alter erreichen, das zwischen x' und x'' in der Mitte liegt. Z. B. die Zahl der 21 bis 20jährigen, die am Anfang des 3. Decbr. 1864 vorhanden waren, dividirt durch die Zahl der Gebornen vom Anfang des 3. Decbr. 1843 bis zum Anfang des 3. Decbr. 1844 liefert, unter jenen Voraussetzungen, den Werth $f(20,_5)$. Will man auf demselben Wege finden, wieviele aus einer Einheit Geborner das Alter von 20 Jahren erreichen, so muss man z. B. die Zahl der 21 bis 19jährigen vom 3. Decbr. 1864 dividiren durch die Zahl der Gebornen vom 3. Decbr. 1843 bis 3. Decbr. 1845.

Wenn man wie in Preussen die Volkszählung nach Jahrgängen der Geburt (nicht nach Altersclassen) vornimmt, so hat man z. B.: die am 3. Decbr. 1864 aus dem Geburtsjahr 1860 noch vorhandenen; sie stehen im Alter von etwa $4,_{92}$ bis $3,_{92}$ Jahren; ihre Zahl, dividirt durch die Zahl der im Jahr 1860 geborenen, liefert unter ähnlichen Voraussetzungen die Zahl derer, die aus einer Einheit von Gebornen das Alter von $\frac{4,_{92}+3,_{92}}{2} = 4,_{42}$ Jahren erreichen.

Die so gefundenen Werthe der Absterbeordnung sind natürlich aufzufassen als Werthe derjenigen Absterbeordnung, aus welcher sich, wenn jeder Geburtenzuwachs ihr unterworfen gewesen wäre, die Grösse der Altersclasse zur Zeit t erklären lässt.

Die Voraussetzungen sind um so zulässiger, je kleiner die Differenz $x''-x'$ ist. Für einjährige Altersclassen z. B. wäre gegen dieselben wohl nicht viel einzuwenden, denn für so kurze Zeitstrecken darf man die Geburtendichtigkeit constant, und für so kurze Stufen des Alters die Absterbecurve geradlinig annehmen, wenn es nur auf eine annähernde Berechnung ankommt.

Die Methode hat, bei Volkszählungen nach Altersclassen, für die Verhältnisse des Zollvereins das Unbequeme, dass man die Geburtsregister nicht für

ganze Kalenderjahre, sondern von dem 3. Decbr. des einen bis zum 3. Decbr. des nächsten Jahrs abschliessen müsste, was bekanntlich nicht geschieht. Für die Volkszählung nach Geburtsjahrgängen müsste die Aufnahme an das Ende eines Kalenderjahrs verlegt werden, damit man die Sterblichkeit für diejenigen Altersstufen, die durch eine ganze Zahl von Jahren ausgedrückt werden, finden könnte.

Uebrigens abgesehen von diesen kleinern Schwierigkeiten: der bedeutendste Einwand gegen diese Methoden entsteht daraus, dass es einstweilen schlechterdings unmöglich ist, die Erhebungen nach Altersclassen oder auch nach Jahrgängen der Geburt für einigermassen verlässig zu halten. Die meisten Leute, die bei einer Volkszählung ihr Alter angeben sollen, wissen es entweder oder sagen es wenigstens nur annähernd, nicht genau; so dass z. B. die Altersclassen der 10—11, 20—21, 30—31 jährigen ganz unverhältnissmässig überfüllt erscheinen, weil auch diejenigen darin untergebracht werden, welche ihr Alter aus Irrthum oder Bequemlichkeit „in runder Zahl" angeben. Dieser eine Umstand, der jedem hinreichend bekannt ist, scheint mir hinreichend, um die ganze Methode unbedingt zu verwerfen.

Es gibt für so enorme Fehler auch keine nachträgliche Ausgleichung, die etwas andres wäre, als mehr oder weniger methodische Willkür. Berechnungen nach dieser Methode, ausgeglichen oder nicht, gewähren nur ein ganz ungefähres Bild von der Sterblichkeit nach dem Alter.

Die neuesten Berechnungen dieser Art sind für die preussische Volkszählung vom 3. Decbr. 1864 ausgeführt (vergl. Zeitschrift des k. stat. Bureaus 1867, Nr. 1, 2 und 3, Seite 67). Von einer Einheit männlicher Individuen, die im Jahre 1860 geboren waren, erreichten den 3. Decbr. 1864 folgende Zahl: 0,6959. Vorausgesetzt constante Geburtendichtigkeit im Jahre 1860, und geradlinige Absterbeordnung vom Alter $3,_{92}$ bis $4,_{92}$ dürfte man danach annehmen, aus einer Einheit von Gebornen erreichten 0,6959 das Alter von $4,_{42}$ Jahren. In diesem Sinne könnte die dort gegebene Tabelle ausgelegt werden. Aber das Material ist so fehlerhaft, dass z. B. das kleinere Alter von $3,_{42}$ Jahren erreicht wird von 0,6735 Einheiten, also von weniger Einheiten als das höhere Alter, was ganz undenkbar ist. Von einer wirklich exacten Erforschung der Sterblichkeit auf diesem Wege kann also gar keine Rede sein. —

Wir kommen zu den Verstorbenen. Die erste Hauptgesammtheit eignet sich zur directen Auffindung der Absterbeordnung und gehört also nicht hierher; die andern beiden Hauptgesammtheiten von Verstorbenen sind es allein, die uns hier angehen.

Für die Verstorbenen von der Zeit t' bis t'', stammend aus der Geburtszeit t_0' bis t_0'', hat man (vergl. Gleichung 10. und S. 24) folgende Gleichung:

$$ {}_{t_0'}^{t_0''}M_{t'}^{t''} = \left\{F(t_0'')-F(t_0')\right\}. \left\{f(t'-t_0''+\vartheta'[t_0''-t_0'])-f(t''-t_0''+\vartheta''[t_0''-t_0'])\right\} $$

Daraus geht hervor, dass die Zahl der von t' bis t'' verstorbenen, die aus der Geburtszeit t_0' bis t_0'' stammen, dividirt durch $F(t_0'')-F(t_0')$, das heisst durch die Zahl der von t_0' bis t_0'' gebornen, einen Quotienten liefert, den man ansehen darf als die Zahl derjenigen, die aus einer Einheit von Gebornen zwischen dem Alter $t'-t_0''+\vartheta'(t_0''-t_0')$ und $t''-t_0''+\vartheta''(t_0''-t_0')$ sterben. Die Werthe von ϑ' und ϑ'', von denen man nur weiss, dass sie zwischen 0 und 1 enthalten sind, können durch ähnliche Voraussetzungen bestimmt werden: Es sei wieder die Geburtendichtigkeit von t_0' bis t_0'' constant; die Ordinaten der Curve $f(x)$ seien von $x=t'-t_0''$ bis $x=t'-t_0'$ dieselben, wie die Ordinaten der Sehne, die durch die Endpuncte der Ordinaten $f(t'-t_0'')$ und $f(t'-t_0')$ gelegt ist; und die Ordinaten der Curve $f(x)$ seien von $x=t''-t_0''$ bis $x=t''-t_0'$ dieselben, wie die Ordinaten der Sehne durch die Endpuncte von $f(t''-t_0'')$ und $f(t''-t_0')$; so hat man:

$$ {}_{t_0'}^{t_0''}M_{t'}^{t''} = \left\{F(t_0'')-F(t_0')\right\}. \left\{f(t'-t_0''+\tfrac{1}{2}[t_0''-t_0'])-f(t''-t_0''+\tfrac{1}{2}[t_0''-t_0'])\right\} $$

Man erhält also, wenn die Zahl dieser Verstorbenen dividirt wird durch die Zahl der Gebornen, das heisst durch $F(t_0'')-F(t_0')$, einen Quotienten, den man unter obigen Voraussetzungen ansehen kann als die Zahl derer, die aus einer Einheit von Gebornen vom Alter $t'-t_0''+\frac{1}{2}(t_0''-t_0')$ bis zum Alter $t''-t_0''+\frac{1}{2}(t_0''-t_0')$ sterben.

Die Zahl der im Jahre 1864 verstorbenen aus dem Geburtsjahre 1860 (d. i.: $t'=1863$, $t''=1864$, $t_0'=1859$, $t_0''=1860$), dividirt durch die Zahl der im Jahre 1860 gebornen, gibt also an, wie viele von einer Einheit Geborner wegsterben zwischen dem Alter $3{,}_5$ bis $4{,}_5$, wenn über die Geburtendichtigkeit und die Absterbeordnung die genannten Voraussetzungen zugelassen werden.

Das Material zu solchen Berechnungen liegt meines Wissens nur für Preussen vor (vergl. Zeitschrift des k. pr. stat. Bureaus 1866, Nr. 4, 5, 6; Seite 113), wo die im Jahr 1864 verstorbenen nach dem Jahrgang der Geburt geschieden sind. Leider sind dort für jede solche Gesammtheit falsche Altersgrenzen angegeben: z. B. ist gesagt, die im Jahr 1864 verstorbenen aus dem Geburtsjahr 1860 stünden zwischen dem Alter 4 und 5; während sie doch zwischen dem Alter 3 und 5 stehen (vergl. oben Seite 32). Derselbe Fehler findet sich in den Köpfen der Tabellen, woraus das Material entnommen ist (vergl. Zeitschrift etc. a. a. O. Seite 84) und hat vermuthlich auch in den Formularen gestanden, die von den Geistlichen auf Grund der Kirchenbücher angefüllt wurden. Es dürfte daher häufig eingetragen sein, wie viele 5—4jährige im Jahre 1864 verstorben sind — eine Hauptgesammtheit, wie in Gleichung 7.; anstatt wie viele aus dem Jahre 1860 stammten — eine Hauptgesammtheit, wie in Gleichung 6., beide wesentlich verschieden von einander. Diese Verwirrung macht das Material ziemlich unzuverlässig.

Es ist übrigens dort eine Verarbeitung des besprochenen Materials in dem Sinne der obigen Methode nicht ausgeführt. —

Viel wichtiger ist die Gesammtheit der x'' bis x'jährig von t' bis t'' verstorbenen für die indirecte Aufsuchung der Absterbeordnung, weil solche Gesammtheiten in den meisten Ländern erhoben werden. Zwei Methoden kommen hierbei in Betracht, die beide auf solche Gesammtheiten gegründet sind: die sogen. Halley'sche und die sogen. Hermannische. Die Halley'sche ist längst und mit Recht verworfen; aber da sie für stätige Geburtenfolge noch nicht geprüft ist, so kann sie nicht ohne weiteres übergangen werden.

Die sogen. Halley'sche Methode behauptet, man könne die x' bis x''jährig (aus einer Einheit von Gebornen) sterbenden, also die Differenz $f(x')-f(x'')$, dadurch finden, dass man die Zahl der x'' bis x'jährig in einem Zeitraum verstorbenen dividirt durch die Zahl der ω bis 0jährig, also überhaupt in jenem Zeitraum verstorbenen. Als Dividend verwendet die Halley'sche Methode demnach (vergl. Gleichung 7.):

$$ {}^{t-x'}_{t-x''}M^{t''}_{t'} = \left\{ F(t''-x') - F(t'-x') \right\} f(x') - \left\{ F(t''-x'') - F(t'-x'') \right\} f(x'') - \int_{t_0=t'-x''}^{t_0=t'-x'} \left\{ F'(t_0+t''-t') - F'(t_0) \right\} f(t'-t_0)\,dt_0 $$

und als Divisor (vergl. ebendaselbst):

$$ {}^{t-0}_{t-\omega}M^{t''}_{t'} = \left\{ F(t'') - F(t') \right\} - \int_{t_0=t'-\omega}^{t_0=t'-0} \left\{ F(t_0+t''-t') - F'(t_0) \right\} f(t'-t_0)\,dt_0 $$

Nun handelt es sich darum, die Bedingung zu finden, unter welcher der Halley'sche Quotient gleich $f(x')-f(x'')$ wird; und zwar muss die Bedingung in einer solchen Form gegeben werden, dass man das Stattfinden derselben prüfen kann.

Man hat die Wahl, ob in der Bedingungsgleichung Beziehungen zwischen Gesammtheiten von Lebenden und Verstorbenen, oder nur Beziehungen zwischen Gesammtheiten von Lebenden vorkommen sollen. Wählt man das erstere, so ist folgendes die Bedingung:

$$ \left\{ F(t''-x') - F(t'-x') - {}^{t-0}_{t-\omega}M^{t''}_{t'} \right\} . f(x') - \left\{ F(t''-x'') - F(t'-x'') - {}^{t-0}_{t-\omega}M^{t''}_{t'} \right\} f(x'') $$
$$ - \int_{t_0=t'-x''}^{t_0=t'-x'} \left\{ F'(t_0+t''-t') - F'(t_0) \right\} . f(t'-t_0)\,dt_0 = 0 $$

Da $f(x')$ und $f(x'')$ nicht bekannt sind — sonst brauchte man den Werth ihrer Differenz nicht erst zu suchen — so kann man nur den besondern Fall der Erfüllung prüfen, wenn alle drei Ausdrücke auf der linken Seite jeder für sich gleich Null ist; das heisst wenn:

1) von t' bis t'' ebensoviele gestorben sind, als sowohl von $t'-x'$ bis $t''-x'$, als auch von $t'-x''$ bis $t''-x''$ geboren wurden;

2) die Altersclasse der x'' bis x'jährigen zur Zeit t'' ebenso zahlreich ist als zur Zeit t'. Volkszählungslisten nach dem Alter, Geburts- und Sterbe-

register geben die Mittel an, um zu prüfen, ob für ein gegebenes x' und x'' diese besondre Erfüllung stattfinde.

Will man die Bedingung ausgedrückt haben als eine Beziehung zwischen Gesammtheiten von Lebenden allein, so kann man sie in folgender Form anschreiben, wenn man bedenkt, dass stets:

$$\left\{F(t''-x)-F(t'-x)\right\}-\left\{F(t'')-F(t')\right\}=-\int_{t_0=t'-x}^{t_0=t'}\left\{F'(t_0+t''-t')-F'(t_0)\right\}dt_0$$

nämlich in der Form:

$$\left\{f(x')-f(x'')\right\}\int_{t_0=t'-\omega}^{t_0=t'}\left\{F'(t_0+t''-t')-F'(t_0)\right\}f(t'-t_0)\,dt_0\quad-f(x')\int_{t_0=t'-x'}^{t_0=t'}\left\{F'(t_0+t''-t')-F'(t_0)\right\}dt_0$$
$$-\int_{t_0=t'-x''}^{t_0=t'-x'}\left\{F'(t_0+t''-t')-F'(t_0)\right\}f(t'-t_0)dt_0+f(x'')\int_{t_0=t'-x''}^{t_0=t'}\left\{F'(t_0+t''-t')-F'(t_0)\right\}dt_0=0$$

Hier lässt sich der besondre Fall der Erfüllung prüfen, wenn alle vier Ausdrücke auf der linken Seite für sich gleich Null sind, das heisst wenn

1) die Zahl der ω bis 0jährigen (das ist die Volkszahl) zur Zeit t' ebenso gross ist, als zur Zeit t'';

2) von $t'-x''$ bis $t''-x''$, sowie von $t'-x'$ bis $t''-x'$, sowie von t' bis t'' gleich viele geboren sind;

3) die x'' bis x'jährigen zur Zeit t'' eben so zahlreich sind, als zur Zeit t'.

Die zuletzt entwickelte Form der Bedingungsgleichung lässt erkennen, welche Beziehungen vorausgesetzt werden müssen zwischen den Werthen der Geburtendichtigkeit $F'(t_0)$ und den Werthen der Absterbeordnung $f(x)$. —

Gesetzt den Fall, es könnte nachgewiesen werden, dass für ein gewisses x' und ein gewisses x'' die Bedingung erfüllt sei, so würde sie deshalb für ein andres x' und x'' nicht erfüllt zu sein brauchen. Es müsste von neuem untersucht werden und es fragt sich, ob man dazu immer das Material hätte. Zur eigentlichen Methode wird Halley's Verfahren erst dann, wenn es für jedes beliebige x' neben jedem beliebigen x'' gilt.

Man sieht nun aus der zuletzt entwickelten Form, dass dies der Fall ist, wenn man für alle Werthe von t_0 zwischen $t'-\omega$ und t' hat:

$$F'(t_0+t''-t')-F'(t_0)=0;$$

dann ist die Bedingungsgleichung für jeden Werth von x' und x'' erfüllt. Wer also nach Halley's Methode die verschiedenen Werthe von $f(x')-f(x'')$ berechnet, ohne für jeden Fall die besondre Erfüllung der Bedingungsgleichung nachzuweisen, der setzt voraus, dass die Werthe der Geburtendichtigkeit, von $t_0=t'-\omega$ an bis $t_0=t'$, in jedem Zeitpunct dieselben sind, wie in dem um $t''-t'$ Einheiten später liegendem Zeitpunct; dass also die Geburtendichtigkeit eine

6*

periodische Function der Zeit ist, deren Periode die Dauer von $t''-t'$ Einheiten hat.

Dies ist insbesondre der Fall, wenn die Geburtendichtigkeit constant ist; es ist aber nicht nothwendig, diese Voraussetzung zu machen. Hingegen genügt es nicht, von jährlich gleichen Geburtenmengen zu sprechen, denn jährlich gleiche Geburtenmengen können auch stattfinden, ohne dass die Geburtendichtigkeit periodisch wiederkehrende Werthe hat. Ueber die Gestorbenen oder über die Volkszahl oder den Bestand der Altersclassen etwas hinzuzufügen, ist ganz unnöthig, sobald man eine einzige herrschende Absterbeordnung voraussetzt. Alle Kritiker der Halley'schen Methode sprechen von jährlich gleichen Geburtenmengen — weil sie in der Vorstellung befangen sind, als wäre die Geburtenfolge nicht stätig — und sagen insofern nicht genug; ausserdem erwähnen sie nicht nur das Herrschen einer einzigen Absterbeordnung, sondern sprechen daneben noch von „constanter Bevölkerung," sagen also insofern zu viel.

Auch bei Fischer (Grundzüge des Versicherungswesens etc. in dem Capitel über Halley's Methode) finden sich diese Ungenauigkeiten.

Doch das sollte nur im vorübergehen bemerkt werden. Die Methode ist so schlecht als möglich, weil die Geburtendichtigkeit, fast überall im Wachsen, weit davon entfernt ist, periodisch wiederkehrende Werthe zu haben. —

Hermann's Methode, angewendet auf das Königreich Bayern (vergl. statist. Mittheilungen Heft III. Seite V.) verwendet gleichfalls, wie die Halley'sche, die Verstorbenen eines Zeitraums, geordnet nach Altersclassen, als Dividenden; jedoch als Divisor nicht die Zahl der überhaupt in jenem Zeitraum verstorbenen; sondern eine Zahl von Gebornen. Man wird sich erinnern, dass die Verstorbenen des Alters x'' bis x' aus der Sterbezeit t' bis t'' geboren sind von $t_0 = t'-x''$ bis $t_0 = t''-x'$, also während einer Zeitstrecke, deren Dauer gleich $t''-t'+x''-x'$ ist. Die Gebornen nun, deren Anzahl in der Hermannischen Methode als Divisor auftritt, werden einem Theil der Zeitstrecke von $t'-x''$ bis $t''-x'$ entnommen; und zwar sind dabei zwei ganz analoge Fälle zu unterscheiden.

Nennen wir die Zahl der Gebornen, durch welche die Zahl der x'' bis x'jährig verstorbenen dividirt werden soll, einstweilen m, ohne etwas darüber auszusagen, aus welcher Strecke der Geburtszeit sie entnommen sind. Dann wird folgende Bedingung erfüllt sein müssen, damit Hermann's Quotient gleich $f(x')-f(x'')$ werde, nämlich:

$$\Big\} F(t''\text{-}x')\text{-}F(t'\text{-}x') - m \Big\} f(x') - \Big\} F(t''\text{-}x'')\text{-}F(t'\text{-}x'') - m \Big\} f(x'') - \int_{t_0 = t'-x''}^{t_0 = t'-x'} \Big\} F'(t_0 + t''\text{-}t') - F'(t_0) \Big\} f(t'\text{-}t_0)\, dt_0 = 0$$

Die Methode besteht nun insbesondre darin, dass man wählt: entweder $m = F(t''-x')-F(t'-x')$; das heisst dass man mit der Zahl der Gebornen aus

der Geburtszeit $t_0 = t'-x'$ bis $t_0 = t''-x'$ dividirt. Die Bedingung vereinfacht sich unter diesen Umständen bedeutend. Ihre Erfüllung kann man für den besondern Fall prüfen, wenn jeder Ausdruck auf der linken Seite für sich gleich Null wird, das heisst wenn 1. von $t'-x''$ bis $t''-x''$ ebensoviele geboren sind, als von $t'-x'$ bis $t''-x'$; 2. die x'' bis x'jährigen zur Zeit t'' ebenso zahlreich sind, als zur Zeit t'.

Oder man wählt $m = F(t''-x'')-F(t'-x'')$, in welchem Falle die Bedingungsgleichung durch dieselben Annahmen wie vorher in besondrer Weise erfüllt wird.

Also Hermann's Methode ist jedenfalls anwendbar, wenn von $t'-x''$ bis $t''-x''$ ebensoviele geboren sind, als von $t'-x'$ bis $t''-x'$, und wenn die x'' bis x'jährigen zur Zeit t'' ebenso zahlreich sind, als zur Zeit t'; aber sie kann auch in andern Fällen richtig sein, nur dass man dann kein Mittel der Prüfung hat.

Gesetzt es sei $m = F(t''-x')-F(t'-x')$ gewählt, so kann die Bedingungsgleichung (Seite 84) auch so geschrieben werden (eine herrschende Absterbeordnung vorausgesetzt):

$$-\int_{t_0 = t'-x''}^{t_0 = t'-x'} \Big\{F'(t_0+t''-t')-F'(t_0)\Big\}.\ \Big\{f(t'-t_0)-f(x'')\Big\}.\ dt_0 = 0$$

Da nun $f(t'-t_0) - f(x'')$ immer positiv ist für alle Werthe von t_0, welche im Laufe der Integration darin auftreten (denn $f(t'-t_0)$ durchläuft die Werthe von $f(x'')$ bis $f(x')$, die alle nicht kleiner sind als $f(x'')$, aus der Natur der Absterbeordnung), so kann diese Bedingung nicht erfüllt werden, wenn $F'(t_0+t''-t')-F'(t_0)$ für alle auftretenden Werthe von t_0 stets positiv oder stets negativ ist. Wenn also die Geburtendichtigkeit von $t_0 = t'-x''$ bis $t_0 = t'-x'$ in jedem Zeitpuncte grösser oder in jedem Zeitpuncte kleiner ist als in dem Zeitpuncte, der um $t''-t'$ Einheiten später liegt, so kann Hermann's Methode nicht benutzt werden. Ist $F'(t_0+t''-t')-F'(t_0)$ bald positiv bald negativ, so kann die Bedingungsgleichung erfüllt sein. Sie muss erfüllt sein, wenn $F'(t_0+t''-t')-F'(t_0)=0$, das heisst wenn nach Verlauf von $t''-t'$ Zeiteinheiten die Werthe der Geburtendichtigkeit sich wiederholen. Insbesondere ist also bei constanter Geburtendichtigkeit die Hermannische Methode zulässig.

Wäre $m = F(t''-x'')-F(t'-x'')$ gewählt, so hätte man für die Bedingungsgleichung auch folgende Form:

$$-\int_{t_0 = t'-x''}^{t_0 = t'-x'} \Big\{F'(t_0+t''-t')-F'(t_0)\Big\}.\ \Big\{f(t'-t_0)-f(x')\Big\} dt_0 = 0$$

Hierin nimmt $f(t'-t_0)-f(x')$ nur negative Werthe an, woraus man ähnliche Betrachtungen wie oben ableiten kann.

Wo man die Hermannische Methode anwendet, ohne die Erfüllung der nöthigen Bedingungen nachzuweisen, da setzt man voraus, dass von $t'-x''$ bis

$t'-x'$ dieselben Werthe der Geburtendichtigkeit in derselben Reihenfolge erscheinen, wie von $t''-x''$ bis $t''-x'$. Die Voraussetzung, wenn $t''-t'$ und $x''-x'$ klein sind, etwa = 1 Jahr, ist nicht so sehr kühn. Sie wird zwar nie in aller Strenge erfüllt sein, aber die Abweichung ist so gross nicht, als z. B. bei der Halley'schen Methode, wo man über die Geburtendichtigkeit einer viel längeren Zeitstrecke willkürlich verfügt; und darin besteht der Fortschritt, der in Hermann's Methode liegt.

Sie ist die beste von denjenigen indirecten Methoden, welche durch eine einzige Division den Werth von $f(x')-f(x'')$ auffinden wollen.

Zweites Capitel.

Anhaltische Methode.

Die Auszüge, welche das herzogl. Anhaltische statistische Bureau aus den Sterberegistern anfertigen liess, enthielten die Verstorbenen nach der Sterbezeit und nach Altersclassen geordnet, also die x'' bis x'jährig von t' bis t'' verstorbenen. Sollte das Material verarbeitet werden, um daraus die Sterblichkeit nach dem Alter zu finden, so musste jedenfalls eine indirecte Methode angewendet werden, denn die gegebenen Gesammtheiten von Verstorbenen gestatten nicht die Sterblichkeit nach dem Alter ohne Rücksicht auf die Geburtendichtigkeit zu finden. Das nächste wäre die Anwendung der Hermannischen Methode gewesen; aber die sehr ausführlichen Auszüge aus den Geburtsregistern, worin die Geburtenmenge der einzelnen Monate des Jahres für Anhalt nachgewiesen war, gaben über die wirkliche Geburtenfolge einen so genauen und eingehenden Aufschluss, dass es unmöglich erschien, über die Geburtenfolge willkürliche Voraussetzungen anzuwenden, wie es bei der Hermannischen Methode geschieht. Es entstand also die Aufgabe auf die wirkliche Geburtenfolge Rücksicht zu nehmen und eine entsprechende Methode, die nicht vorhanden ist, zu finden, wie man dann aus den gegebenen Gesammtheiten die Grösse $f(x')-f(x'')$ darstellen kann. Diese Aufgabe habe ich in folgender Weise zu lösen versucht.

Nach der etwas umgeformten Gleichung 7. können die x'' bis x'jährig von t' bis t'' verstorbenen so dargestellt werden:

$$ {}^{t-x'}_{t-x''}M^{t''}_{t'} = \Big\{F(t''-x')-F(t'-x')\Big\} f(x') - \Big\{F(t''-x'')-F(t'-x'')\Big\} f(x'') - \int_{t_0=t'-x''}^{t_0=t'-x'} \Big\{F'(t_0+t''-t')-F'(t_0)\Big\} f(t'-t_0)\,dt_0 $$

also durch eine Verbindung der Werthe von $F'(t_0)$ und von $f(x)$. Angenommen die Werthe von $F'(t_0)$ seien nicht mit jedem andern Werthe von t_0 veränderlich; sondern sie seien innerhalb endlicher Zeitintervalle von der Dauer Δt_0 unveränderlich. Wenn man Δt_0 hinreichend klein wählt, so ist diese Annahme zulässig.

Die Veränderliche t_0 durchläuft die Werthe von $t_0 = t'-x''$ bis $t_0 = t'-x'$; einen beliebigen Werth von t_0, der zwischen diesen Grenzen liegt, kann man also durch $t_0 = t'-x''+\tau$ bezeichnen, worin τ die Zahl der Zeiteinheiten angibt, um die t_0 grösser ist als $t'-x''$. Betrachten wir nun τ als die Veränderliche und schreiben also $\triangle t_0 = \triangle\tau$. Mit dieser Bezeichnung und mit der gemachten Annahme über die Aenderung der Geburtendichtigkeit hat man nun

$$F'(t_0+t''-t') - F'(t_0) = \frac{\triangle F(t''-x''+\tau)}{\triangle\tau} - \frac{\triangle F(t'-x''+\tau)}{\triangle\tau}\,.$$

eine Differenz, die constant ist für alle Werthe der Veränderlichen von $t_0 = t'-x''+\tau$ bis $t_0 = t'-x''+\tau+\triangle\tau$.

Man hat also:

$$\int\limits_{t_0 = t'-x''+\tau}^{t_0 = t'-x''+\tau+\triangle\tau} \Big\{F'(t_0+t''-t') - F'(t_0)\Big\} f(t'-t_0)dt_0 = \frac{\triangle F(t''-x''+\tau) - \triangle F(t'-x''+\tau)}{\triangle\tau} \int\limits_{t_0 = t'-x''+\tau}^{t_0 = t'-x''+\tau+\triangle\tau} f(t'-t_0)\,dt_0$$

$$= \frac{\triangle F(t''-x''+\tau) - \triangle F(t'-x''+\tau)}{\triangle\tau} \int\limits_{x = x''-(\tau+\triangle\tau)}^{x = x''-\tau} f(x)dx$$

Hier können wir (da es unser Zweck ist, den Werth von $f(x')-f(x'')$ einzuführen) eine weitere Voraussetzung, und zwar über die Natur der Absterbeordnung nicht umgehen. Nehmen wir an, die Werthe von $f(x)$ seien zwischen x' und x'' durch die Gleichung gegeben:

$$f(x)-f(x') = -\frac{f(x')-f(x'')}{x''-x'}\,(x-x')$$

das heisst benutzen wir an anstatt der Absterbecurve vielmehr die Sehne, welche durch die Endpuncte der nicht bekannten Ordinaten $f(x')$ und $f(x'')$ gelegt ist, so hat man:

$$\int\limits_{x = x''-(\tau+\triangle\tau)}^{x = x''-\tau} f(x)dx = \triangle\tau\,\left[f(x') - \Big\{f(x')-f(x'')\Big\}\Big\{1 - \frac{\tau+0{,}5.\,\triangle\tau}{x''-x'}\Big\}\right]$$

Unter diesen Annahmen über Geburtendichtigkeit und Absterbeordnung erhält man:

$$\int\limits_{t_0 = t'-x''}^{t_0 = t'-x'} \Big\{F'(t_0+t''-t') - F'(t_0)\Big\} f(t'-t_0)\,dt_0 = \sum_{\tau = 0}^{\tau+\triangle\tau = x''-x'} \frac{\triangle F(t''-x''+\tau) - \triangle F(t'-x''+\tau)}{\triangle\tau} \int\limits_{x = x''-(\tau+\triangle\tau)}^{x = x''-\tau} f(x)dx$$

$$= \Big\{F(t''-x')-F(t'-x')\Big\}f(x') - \Big\{F(t''-x'')-F(t'-x'')\Big\}f(x')$$

$$- \Big\{f(x')-f(x'')\Big\} \sum_{\tau = 0}^{\tau+\triangle\tau = x''-x'} \Big\{\triangle F(t''-x''+\tau) - \triangle F(t'-x''+\tau)\Big\} \Big\{1 - \frac{\tau+0{,}5.\,\triangle\tau}{x''-x'}\Big\}$$

woraus:

$$ {}^{t-x'}_{t-x''}M^{t''}_{t'} = \left\{ f(x')-f(x'') \right\} \left[\left\{ F(t''-x'')-F(t'-x'') \right\} + \sum_{\tau=0}^{\tau+\triangle\tau=x''-x'} \left\{ \triangle F(t''-x''+\tau)-\triangle F(t'-x''+\tau) \right\} \left\{ 1-\frac{\tau+0{,}5.\triangle\tau}{x''-x'} \right\} \right] $$

Hierin erscheint die Zahl der x'' bis x'jährig von t' bis t'' verstorbenen als ein Product, dessen einer Factor das gesuchte $f(x')-f(x'')$ ist, während der andre Factor leicht gefunden werden kann, wenn man, wie wir vorausgesetzt haben, die Geburtenmengen der Zeitabschnitte von der Länge $\triangle t_0$ kennt.

Nennt man den Ausdruck unter dem Summenzeichen „die Correction wegen der Geburtendichtigkeit,“ so kann man diese Methode in folgender Weise zu der Hermannischen in Beziehung setzen:

Um die Grösse $f(x')-f(x'')$ zu finden, dividirt die Hermannische Methode die Zahl der x'' bis x'jährig von t' bis t'' verstorbenen durch die Zahl der von $t'-x''$ bis $t''-x''$ gebornen ohne Rücksicht auf die wirkliche Geburtenvertheilung; die Anhaltischen dagegen dividirt dieselbe Zahl der Verstorbenen durch die Zahl der Gebornen nachdem der letztern eine Correction wegen der beobachteten Geburtendichtigkeit beigefügt ist. Die Resultate der Hermannischen Methode sind gestört durch die wirkliche Geburtendichtigkeit, welche den Voraussetzungen der Hermann'schen Methode nicht entspricht; in der Anhaltischen Methode hat man die wirkliche Geburtendichtigkeit berücksichtigt und ihre Ergebnisse sind also frei von diesen störenden Einflüssen. Die Anhaltische Methode macht zwar über die Natur der Absterbeordnung von x' bis x'' eine Voraussetzung, aber eine solche, die sich nicht auf die Beschaffenheit der Geburtendichtigkeit bezieht; die also für jeden Fall der Anwendung dieselbe ist und über deren Zulässigkeit man ein Urtheil hat. Hingegen die Hermann'sche Methode macht über die Natur der Absterbeordnung eine solche Voraussetzung nicht, sondern sie setzt Beziehungen zwischen Absterbeordnung und Geburtendichtigkeit voraus, die sich nach dem einzelnen Fall der Anwendung richten und über deren Zulässigkeit man in den meisten Fällen kein Urtheil hat.

Der Werth $f(x')-f(x'')$, berechnet nach der Anhaltischen Methode, hat folgenden Sinn: er gibt die Verstorbenen zwischen dem Alter x' bis x'' aus derjenigen Absterbeordnung an, die, wenn ihr jeder Geborne aus der Geburtszeit $t'-x''$ bis $t''-x'$ unterwerfen gewesen wäre, dieselbe Zahl x'' bis x'jähriger Verstorbener in der Zeit t' bis t'' geliefert hätte, wie die beobachtete Anzahl der x'' bis x'jährig von t' bis t'' verstorbenen. Also $f(x')-f(x'')$ gehört derjenigen Absterbeordnung an, aus welcher sich (mit Rücksicht auf die Geburtendichtigkeit der entsprechenden Geburtszeit) die Zahl der beobachteten x'' bis x'jährig von t' bis t'' verstorbenen erklären lässt — sobald man von x' bis x'' eine geradlinige Absterbeordnung annimmt. —

Untersuchen wir nun, welchen Einfluss es hat, dass wir anstatt der Absterbecurve vielmehr die Sehne, die durch die Endpuncte der Ordinaten $f(x')$ und $f(x'')$ gelegt ist, benutzt haben.

Angenommen die Ordinaten der Curve seien zwischen x' und x'' alle kleiner als die Ordinaten der Sehne, dann würde das Flächenstück, das zwischen zwei Ordinaten der Curve, zwischen der Curve und der Abscissenaxe eingeschlossen ist, kleiner sein, als das zwischen denselben verlängerten Ordinaten, zwischen der Sehne und der Abscissenaxe eingeschlossene Flächenstück. Man hätte also zu schreiben:

$$\triangle\tau.\left[f(x')-\left\{f(x')-f(x'')\right\}\left\{1-\frac{\tau+0{,}5.\triangle\tau}{x''-x'}\right\}\right]>\int_{x=x''-(\tau+\triangle\tau)}^{x=x''-\tau}f(x)dx$$

Der Factor $\left\{1-\frac{\tau+0{,}5.\triangle\tau}{x''-x'}\right\}$ ist also dann zu klein, es müsste ein grösserer Factor sein, wenn beide Ausdrücke einander gleich sein sollen.

Wie nun dieser zu kleine Factor wirkt, nachdem er in die Gleichung für ${}^{t-x'}_{t-x''}M^{t''}_{t'}$ (S. 88) übergegangen ist, das hängt von dem Vorzeichen ab, welches die Differenz $\triangle F(t''-x''+\tau)-\triangle F(t'-x''+\tau)$ für die eintretenden Werthe von τ annimmt.

Das Vorzeichen kann beständig positiv, beständig negativ, oder auch abwechselnd positiv und negativ sein.

Ist das Vorzeichen beständig positiv, das heisst ist die Geburtendichtigkeit in jedem Zeitabschnitt von der Länge $\triangle t_0$ kleiner als in dem gleichlangen Zeitabschnitt, welcher um $t''-t'$ Einheiten später beginnt, so ist die berechnete Correction Σ zu klein, und man kann also behaupten, dass einerseits:

$${}^{t-x'}_{t-x''}M^{t''}_{t'}>\left\{f(x')-f(x'')\right\}\left[\left\{F(t''-x'')-F(t'-x'')\right\}+\Sigma\right] \text{ und andrerseits}$$

$${}^{t-x'}_{t-x''}M^{t''}_{t'}<\left\{f(x')-f(x'')\right\}\left[F(t''-x')-F(t'-x')\right]$$

(man gewinnt diese Ungleichung durch die Annahme, dass $\left\{1-\frac{\tau+0{,}5.\triangle\tau}{x''-x'}\right\}$ für alle Werthe von τ gleich 1 wäre, während doch dieser Ausdruck seiner Natur nach zwischen 0 und 1 enthalten ist).

Für den Fall beständig positiver Vorzeichen hat man also zwei sehr enge Grenzen für $f(x')-f(x'')$ gewonnen.

Ist das Vorzeichen beständig negativ, das heisst ist die Geburtendichtigkeit in jedem Zeitabschnitt, dessen Länge $\triangle t_0$ ist, von $t_0=t'-x''$ bis $t_0=t'-x'$ grösser als in dem Zeitabschnitt, der um $t''-t'$ Einheiten später beginnt, so ist die berechnete Correction, absolut genommen, zu klein, und man hat, da die Correction hier einen Abzug bedeutet, einerseits:

$${}^{t-x'}_{t-x''}M^{t''}_{t'}<\left\{f(x')-f(x'')\right\}\left[\left\{F(t''-x'')-F(t'-x'')\right\}+\Sigma\right] \text{ und andrerseits}$$

$${}^{t-x'}_{t-x''}M^{t''}_{t'}>\left\{f(x')-f(x'')\right\}\left[F(t''-x')-F(t'-x')\right]$$

(die letztere Ungleichung wird wie oben gewonnen).

Man hat also wieder Grenzwerthe, zwischen denen $f(x')-f(x'')$ liegen muss.

Wenn drittens die Vorzeichen der Differenz abwechseln, so weiss man zwar nicht genau, ob der Werth von $f(x')-f(x'')$, den man durch Benutzung der Sehnengleichung erhielt, etwas zu gross oder etwas zu klein ist, aber ganz genau weiss man, dass die Abweichung nicht so bedeutend ist, als wenn man einmal alle positiven Werthe der Differenz gleich Null annimmt, dann alle negativen Werthe gleich Null setzt und die positiven beibehält.

Es wären dadurch für alle drei Fälle — positive, negative, abwechselnde Vorzeichen der Differenzen — Grenzen gesteckt, zwischen denen $f(x')-f(x'')$, liegen muss, wenn man den Fehler vermeiden will, der durch Benutzung der Sehnengleichung entsteht. Für den Fall der abwechselnden Vorzeichen ist der Fehler so unbedeutend, dass er für die Anhalter Berechnungen nicht weiter beachtet wurde.

Aehnliche Betrachtungen lassen sich anstellen, wenn man Grund hat anzunehmen, dass die Ordinaten der Sehne von x' bis x'' alle kleiner sind, als die Ordinaten der Curve. Wenn die Ordinaten der Sehne bald grösser bald kleiner sind, als die der Curve, so ist der entstehende Fehler sehr unbedeutend.

Die Gründe, woraus man schliesst, wie sich die Ordinaten der Sehne zu denen der Curve verhalten, müssen übrigens durch Ueberlegungen, die unabhängig von dieser Methode sind, gewonnen werden, damit man nicht vorwegnehme, was zu beweisen ist. Um zu sagen, durch welche Ueberlegungen, müssen wir erst diese Methode mit der directen vergleichen. —

Die directe Methode um $f(x')-f(x'')$ zu finden besteht bekanntlich darin, dass man die Zahl der x' bis x''jährig verstorbenen, welche von t_0' bis t_0'' geboren waren, nachweist, und durch die Zahl der von t_0' bis t_0'' gebornen dividirt. Die Zeit, worin diese Sterbefälle liegen, hat man, nach gewähltem t_0', t_0'', x', x'', nicht mehr frei, sie reicht von $t=t_0'+x'$ bis $t=t_0''+x''$. Ist wie gewöhnlich $t_0''-t_0'=x''-x'=1$ Jahr gewählt, so liegen die Verstorbenen in zwei Sterbejahren. Man kann also, wenn $f(x')-f(x'')$ nach der directen Methode berechnet wird, den Einfluss eines Jahres der Sterbezeit nicht erkennen, man hat vielmehr die Einflüsse der zwei hinter einander liegenden Sterbejahre untrennbar im Resultat vereinigt — des einen Sterbejahrs, in welchem vielleicht eine Epidemie geherrscht hat, des andern, worin kein solches Ereigniss stattfand.

Will man aber die Einflüsse einer gegebenen Sterbezeit auf die Sterblichkeit erforschen, so kann mit grossem Vortheil die Anhaltische Methode benützt werden, welche alle x'' bis x'jährig verstorbenen einer Zeitstrecke umfasst. Darin besteht der selbständige Werth der Anhaltischen neben der directen Methode.

Wenn ich z. B. berechnen will, welche Sterblichkeit vom Alter 0—1 im Jahr 1863 geherrscht hat; so könnte man nach der directen Methode berechnen: entweder $f(0)-f(1)$ durch Vergleich der aus dem Jahr 1862 stammenden, welche 0—1jährig verstorben sind, mit den Gebornen des Jahrs 1862;

aber diese Sterbefälle liegen nur theilweise im Jahr 1863, das uns doch gerade allein interessirt; oder: $f(0)-f(1)$ durch Vergleich der Verstorbenen des Alters 0 bis 1, die im Jahre 1863 geboren waren; aber auch diese Sterbefälle liegen nur theilweise im Jahre 1863; man kann also auf diese Weise zu keiner reinen Lösung der Frage kommen. Wohl aber wird die Frage durch die Anhaltische Methode gelöst, welche nur die im Jahre 1863 liegenden Sterbefälle des Alters 1—0 behandelt. Beide Methoden sind also neben einander wichtig: die directe um den Einfluss eines bestimmten Geburtsjahrs auf die Sterblichkeit nach dem Alter zu zeigen, die Anhaltische, um den Einfluss eines bestimmten Sterbejahrs auf die Sterblichkeit nach dem Alter zu untersuchen. —

Wenn man, um bei der Anhaltischen Methode den Fehler zu beseitigen, den man durch Benützung der Sehne beging, gewisser Anzeichen bedarf, ob die Ordinaten der Curve grösser oder kleiner als die Ordinaten der Sehne sind, so ist es wohl nicht unerlaubt, diese Anzeichen aus der directen Methode zu entnehmen. Man habe z. B. durch die directe Methode gefunden hat, aus Sterbefällen, die theilweise zwischen den Zeitpunkten t' und t'' liegen, dass $f(0)-f(0,5)$ bedeutend grösser ist, als $f(0,5)-f(1)$; oder um das obige Beispiel zu gebrauchen: man habe aus den 0 bis 0,5jährig verstorbenen, die im Jahre 1862 geboren waren (und die theilweise im Jahre 1863 gestorben sind), durch Vergleich mit den im Jahre 1862 gebornen den Werth $f(0)-f(0,5)$ berechnet, und habe ferner aus den 0,5 bis 1jährig Verstorbenen, die im Jahr 1862 geboren waren (und die auch theilweise im Jahre 1863 gestorben sind) durch Vergleich mit den im Jahre 1862 gebornen den Werth $f(0,5)-f(1)$ berechnet. Es habe sich dabei herausgestellt, dass $f(0)-f(0,5)$ viel grösser ist, als $f(0,5)-f(1)$, so liegt der Schluss nahe, dass die Ordinaten der Curve $f(x)$ zwischen 0 und 1 alle kleiner seien, als die Ordinaten der Sehne. Diesen Schluss, obgleich er nicht zwingend ist, zugegeben, so dürfte es vielleicht erlaubt sein, von dieser Wahrnehmung Gebrauch zu machen, wenn man bei der Berechnung des Werthes $f(0)-f(1)$ aus den 1—0jährig verstorbenen des Jahres 1863 durch die Anhaltische Methode, den Fehler vermeiden will, der durch Benützung der Sehne, anstatt der Curve, begangen wird.

Wenn keine Gründe vorhanden sind, um auf das Verhältniss der Sehne zur Curve zu schliessen, so kann man nichts anders thun, als in der Auslegung des gefundenen Werthes $f(x')-f(x'')$ den Umstand erwähnen, dass man bei der Berechnung anstatt der Curve die Sehne benützt hat. Je kleiner $x''-x'$, desto geringfügiger ist der Umstand. Kleine Altersclassen liegen also im Interesse der Anhaltischen Methode. Hingegen wie lang die Sterbezeit sei, ist für diese Methode ganz gleichgültig, sie ist für die längsten Sterbezeiträume ebenso verwendbar, wie für die kürzesten. Sie verliert an Genauigkeit nicht, wenn die Sterbezeit — und also auch die Zeit, worin die Verstorbenen geboren waren — sehr ausgedehnt ist; denn sie berücksichtigt ja die Geburtendichtigkeit. Darin liegt ihr Vorzug vor der Hermannischen.

Als besondrer Fall der Anhaltischen Methode ist eine Berechnung des Werthes $f(x')—f(x'')$ zu betrachten, die keineswegs neu ist. Nimmt man nämlich an, die Geburtendichtigkeit sei constant erstens von $t_0 = t'—x''$ bis $t_0 = t'—x'$; zweitens von $t_0 = t''—x''$ bis $t_0 = t''—x'$: so ist in der oben gegebenen Gleichung (S. 88) zu setzen $\tau = 0$ und $\triangle\tau = x''—x'$, wodurch:

$$ {}_{t-x''}^{t-x'}M_{t'}^{t''} = \Big\{ f(x')-f(x'') \Big\} . \tfrac{1}{2}\Big[\Big\{ F(t''-x'')-F(t'-x'') \Big\} + \Big\{ F(t''-x')-F(t'-x') \Big\} \Big] $$

Man sieht daraus die Voraussetzungen, die man macht, wenn man $f(x')—f(x'')$ dadurch berechnet, dass man die x'' bis x' jährig von t' bis t'' verstorbenen dividirt durch das arithmetische Mittel der Gebornen von $t'—x''$ bis $t''—x''$ und der Gebornen von $t'—x'$ bis $t''—x'$; z. B. wenn man, um $f(0)—f(1)$ zu finden, die Zahl der 1—0jährig verstorbenen des Jahres 1864 dividirt durch das arithmetische Mittel der Gebornen des Jahres 1863 und der Gebornen des Jahres 1864.

Aber die Zeiträume, für die man constante Geburtendichtigkeit annimmt, sind bei diesem besondern Fall viel zu gross. Die so gefundene Näherung ist nicht genau genug. Es gilt vielmehr, für möglichst kleine Zeiträume die wirkliche Geburtenvertheilung zu berücksichtigen. Hierzu dient nicht diese, sondern die Gleichung auf Seite 88. Die Berechnung der Correction — wie wir den Ausdruck unter dem Summenzeichen nannten — ist da zwar leicht, aber doch ziemlich weitläufig, es sei daher erlaubt, einige Beispiele zu geben; zu welchem Zweck wir einiges Material hier folgen lassen, um daraus die erläuternden Aufgaben zu entnehmen. Dass die Zahlen der Gebornen und Verstorbenen in den folgenden Tabellen so klein sind, hätte nur dann etwas bedenkliches, wenn aus der Verarbeitung derselben allgemeine Schlüsse über Kindersterblichkeit gezogen werden sollten. Hier aber handelt es sich nur darum, die Anwendung der Berechnungsmethode zu zeigen. Die Ergebnisse der Rechnung sind es nicht, auf denen hier der Nachdruck ruht. Daher dürfen die Aufzeichnungen eines so kleinen Gebietes hier verwendet werden.

Früheres Herzogthum Anhalt-Bernburg.

Tafel I. Geborene. Männliche (incl. Todtgeborene).

Kal.-Jahr:	Januar	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Septbr.	Octbr.	Novbr.	Decbr.	zusammen:
1857 m.	111	72	88	72	83	79	95	94	90	83	101	99	1067
1858 m.	101	102	108	92	96	90	81	81	105	93	109	92	1150
1859 m.	92	87	92	96	94	107	91	80	118	110	77	92	1136
1860 m.	100	102	120	82	93	96	87	105	107	109	117	85	1203
1861 m.	83	77	114	84	92	82	99	90	94	110	81	85	1091
1862 m.	112	86	110	82	78	78	90	95	98	109	108	100	1146
1863 m.	103	91	105	106	108	99	115	111	135	91	101	82	1247
1864 m.	120	99	105	85	88	97	112	111	108	104	111	104	1244

Tafel II. Weibliche (incl. Todtgeborne).

Kal.-Jahr:	Januar	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Septbr.	Octbr.	Novbr.	Decbr.	zusammen:
1857 w.	89	68	77	85	54	62	78	99	100	106	99	105	1022
1858 w.	94	72	92	77	69	85	85	80	92	71	88	95	1000
1859 w.	103	74	92	95	97	77	80	77	84	94	76	113	1062
1860 w.	96	106	91	72	75	80	81	99	113	97	74	89	1073
1861 w.	89	99	101	75	93	85	91	99	118	104	108	102	1164
1862 w.	87	93	68	82	82	83	98	92	95	71	76	78	1005
1863 w.	88	86	101	85	104	96	72	81	86	101	89	96	1085
1864 w.	108	94	109	96	102	88	85	81	80	87	94	89	1113

Verstorbene nach Altersclassen und Kalenderjahren.

	Tafel III. Männliche.			Tafel IV. Weibliche.		
Kal.-Jahr:	Todtgeb.	0—1jähr.	1—6jähr.	Todtgeb.	0—1jähr.	1—6jähr.
1857	42	—	—	41	—	—
1858	48	227	122	34	157	162
1859	54	215	113	46	203	87
1860	71	189	89	63	144	87
1861	52	238	106	40	194	139
1862	64	164	65	34	137	73
1863	51	236	151	39	166	131
1864	70	249	189	41	194	144

Tafel V. Hiernach lebend Geborene:

Kal.-Jahr:	Männlich:	Weiblich:
1857	1025	981
1858	1102	966
1859	1082	1016
1860	1132	1010
1861	1039	1124
1862	1082	971
1863	1196	1046
1864	1174	1072

Erstes Beispiel: Es sei der Werth von $f(0)-f(1)$ zu berechnen aus den Angaben der Tabellen über die Zahl der 1—0jährig verstorbenen der Kalenderjahre 1858 bis incl. 1861; man hat dann:

$$x''=1;\ x'=0;\ t''=1864 \text{ Jahre } t'=1857 \text{ Jahre.}$$

Und zwar werde angenommen die Geburtendichtigkeit sei constant:

erstens von $t_0=t'-x''=1856$ Jahre bis $t_0=t'-x'=1857$ Jahre,
das heisst im Kalenderjahre 1857;

zweitens von $t_0=t''-x''=1863$ Jahre bis $t_0=t''-x'=1864$ Jahre,
das heisst im Kalenderjahr 1864;

Unter dieser Annahme gibt die Anhaltische Methode die zuletzt entwickelte Gleichung:

$$\sum_{t-x''}^{t-x'} M_{t'}^{t''} = \left\{f(x')-f(x'')\right\}.\ \tfrac{1}{2}\Big[\left\{F(t''-x'')-F(t'-x'')\right\}+\left\{F(t''-x')-F(t'-x')\right\}\Big]$$

Unter den Gebornen sind nur die Lebendgebornen zu verstehen; unter den 1—0jährig verstorbenen sind die Todtgebornen nicht aufzunehmen. Man hat also nach den Tabellen für unsere Aufgabe:

Männliche: | Weibliche:

$\sum_{t-x''}^{t-x'} M_{t'}^{t''}$ = den 1—0jährig verstorbenen der Kalenderjahre 1858 incl. bis 1864 incl., ohne die Todtgebornen:

$= 1518$ | $= 1195$

$\{F(t''-x'')-F(t'-x'')\}$ = den Lebendgebornen der Kalenderjahre 1857 incl. bis 1863 incl.:

$= 7658$ | $= 7114$

$\{F(t''-x')-F(t'-x')\}$ = den Lebendgebornen der Kalenderjahre 1858 incl. bis 1864 incl.:

$= 7807$ | $= 7205$

hieraus: $\frac{1}{2}[\{F(t''-x'')-F(t'-x'')\}+\{F(t''-x')-F(t'-x')\}] =$

$= 7732{,}_5$ | $= 7159{,}_5$

also: $f(0)-f(1)=\frac{1518}{7732{,}_5}=0{,}196$ | $f(0)-f(1)=\frac{1195}{7159{,}_5}=0{,}167$

Es sterben also von einer Einheit lebend geborner jedes Geschlechts (nach den Verstorbenen während der Kalenderjahre 1858 incl. bis 1864 incl. in Bernburg) zwischen dem Alter 0 bis 1:

0,196 (männlich) | 0,167 (weiblich)

wenn man die Geburtendichtigkeit im Kalenderjahr 1857 und im Kalenderjahr 1864 constant annimmt, und eine geradlinige Absterbeordnung vom Alter 0 bis 1 voraussetzt.

Zweites Beispiel. Es soll der Werth von $f(1)-f(6)$ berechnet werden aus den Angaben über die 6 bis 1 jährig in den Kalenderjahren 1863 und 1864 verstorbenen. Es ist dann:

$$x''=6;\ x'=1;\ t''=1864 \text{ Jahre};\ t'=1862 \text{ Jahre};\ x''-x'=5.$$

Die Verstorbenen stammen aus der Geburtszeit $t_0=t'-x''=1856$ Jahre bis $t_0=t''-x'=1865$ Jahre, also aus den Kalenderjahren 1857 incl. bis 1865.

Angenommen die Geburtendichtigkeit sei innerhalb jedes einzelnen dieser Jahre constant; also $\triangle\tau=1$; so ist die zuerst entwickelte Gleichung (S. 88) anzuwenden. Die Rechnung nimmt folgenden Verlauf, wenn sie zugleich für die männlichen (m) und für die weiblichen (w) geführt wird:

wenn $\tau=$	so ist $1-\frac{\tau+0,5.\triangle\tau}{x''-x'}=$	$\triangle F(t''-x''+\tau)$ gleich			$\triangle F(t'-x''+\tau)$ gleich			$\triangle F(t''-x''+\tau)-\triangle F(t'-x''+\tau)=$	
		den Gebornen d. Kal.-Jahrs:	m.	w.	den Gebornen d. Kal.-Jahrs:	m.	w.	m.	w.
0	0,9	1859	1082	1016	1857	1025	981	+ 57	+ 35
1	0,7	1860	1132	1010	1858	1102	966	+ 30	+ 44
2	0,5	1861	1039	1124	1859	1082	1016	— 43	+108
3	0,3	1862	1082	971	1860	1132	1010	— 50	— 39
4	0,1	1863	1196	1046	1861	1039	1124	+157	— 78

Hiernach ist für die männlichen: | für die weiblichen:

$\Sigma=57.\,0,9+30.\,0,7-43.\,0,5-50.\,0,3+157.\,0,1$ | $\Sigma=35.\,0,9+44.\,0,7+108.\,0,5-39.\,0,3-78.\,0,1$

$=51,_6$ | $=96,_8$

$\{F(t''-x'')-F(t'-x'')\}=$ den Lebendgebornen der Kalenderjahre 1857 und 1858:

$=2127$ | $=1947$

hieraus: $\{F(t''-x'')-F(t'-x'')\}+\Sigma$

$=2178,_6$ | $=2043,_8$

endlich: ${}_{t-x''}^{t-x'}M_{t'}^{t''}=$ den 6 bis 1jährig verstorbenen der Kalenderjahre 1863 und 1864:

$=340$ | $=275$

also $f(1)-f(6)=\frac{340}{2178,_6}=0,156$ | $f(1)-f(6)=\frac{275}{2043,_8}=0,135$

Es sterben also von einer Einheit Geborner jedes Geschlechts vom Alter 1 bis 6, nach den 6 bis 1 jährig in den Kalenderjahren 1863 und 1864 in Bernburg verstorbenen:

0,156 (männliche) | 0,135 (weibliche)

wenn die Geburtendichtigkeit innerhalb je eines Jahres der entsprechenden Geburtsperiode constant und die Absterbeordnung vom Alter 1 bis 6 geradlinig ist.

Drittes Beispiel. Der Werth von $f(0)-f(1)$ ist zu berechnen aus den Angaben über die 1 bis 0jährig im Kalenderjahr 1864 verstorbenen. Man hat also: $x''=1$; $x'=0$; $t''=1864$ Jahre; $t'=1863$ Jahre; $x''-x'=365$ Tage.

Geboren sind diese Verstorbenen von $t_0=t'-x''=1862$ Jahre bis $t_0=t''-x'=1864$ Jahre, also in den Kalenderjahren 1863 und 1864. Es werde angenommen die Geburtendichtigkeit sei innerhalb jedes einzelnen Monats dieser beiden Kalenderjahre constant; dadurch nimmt man auf die wirkliche Geburtenfolge die genaueste Rücksicht. Die Grösse von $\triangle\tau$ richtet sich nach den einzelnen Monaten. Mit der Aenderung * wegen des Schaltjahrs hat man:

$\tau=$	$\triangle\tau=$	$\tau+0{,}5.\triangle\tau=$	$1-\frac{\tau+0{,}5.\triangle\tau}{365}=$	$\triangle F(t''-x''+\tau)$ gleich den Geb. im Jahr 1864 im Monat:			$\triangle F(t'-x''+\tau)$gl. geb. im J. 1863 im Monat:		$\triangle F(t''-x''+\tau)$ $-\triangle F(t'-x''+\tau)=$	
Tage	Tage				m.	w.	m.	w.	m.	w.
0	31	15,5	0,9576	Januar	120	108	103	88	+17	+20
31	28	45,0	0,8767	Februar	$95{,}_5$*	$90{,}_7$*	91	86	$+ 4{,}_5$	$+ 4{,}_7$
59	31	74,5	0,7959	März	105	109	105	101	0	+ 8
90	30	105,0	0,7123	April	85	96	106	85	−21	+11
120	31	135,5	0,6287	Mai	88	102	108	104	−20	− 2
151	30	166,0	0,5452	Juni	97	88	99	96	− 2	− 8
181	31	196,5	0,4616	Juli	112	85	115	72	− 3	+13
212	31	227,5	0,3767	August	111	81	111	81	0	0
243	30	258,0	0,2932	Septbr.	108	80	135	86	−27	− 6
273	31	288,5	0,2096	October	104	87	91	101	+13	−14
304	30	319,0	0,1260	Novbr.	111	94	101	89	+10	+ 5
334	31	349,5	0,0425	Decbr.	104	89	82	96	+22	− 7

berechnet man hiernach die Correction Σ nach der Analogie der vorigen Aufgabe, so findet sie sich:

für die männlichen: $\Sigma=-12{,}_8$ | für die weiblichen: $\Sigma=+43{,}_5$.

Uebrigens erlaubt das mitgetheilte Material nicht, die Vertheilung der Lebendgebornen nach Monaten zu erkennen, sondern nur die Vertheilung der überhaupt gebornen. Nehmen wir an, die Lebendgebornen jedes Monats verhielten sich den überhaupt gebornen desselben Monats, wie die Lebendgebornen des entsprechenden Kalenderjahres zu den überhaupt gebornen desselben Kalenderjahres; und reduciren wir danach die Correction (eine Willkür, die nicht in der Anhaltischen Methode, sondern im Material liegt), so ist:

$\Sigma=-12{,}_{18}$ | $\Sigma=+41{,}_{92}$

Ferner ist: $\{F(t''-x'')-F(t'-x'')\}=$ den Lebendgebornen des Kalenderjahres 1863:

$=1196$ | $=1046$

sodass: $\{F(t''-x'')-F(t'-x'')\}+\Sigma$

$=1183{,}_{82}$ | $=1087{,}_{92}$

endlich: ${}_{t-x''}^{t-x'}M_{t'}^{t''}=$ den 1 bis 0jährig im Jahr 1864 verstorbenen

$=249$ | $=194$

sodass: $f(0)-f(1)=\frac{249}{1183{,}_{82}}=0{,}210$ | $f(9)-f(1)=\frac{194}{1087{,}_{92}}=0{,}178$

Das heisst die 1 bis 0jährig verstorbenen erklären sich, mit Rücksicht auf die monatliche Geburtendichtigkeit der Jahre 1863 und 1864 aus denen sie stammen, durch eine als herrschende angenommene Absterbeordnung, welche so beschaffen ist, dass von einer Einheit Geborner jedes Geschlechts

0,210 männliche 0,178 weibliche sterben,

sobald man eine geradlinige Absterbeordnung zulässt.

Wenn man voraussetzen will, die Ordinaten der Absterbeordnung seien vom Alter 0 bis 1 alle kleiner als die Ordinaten der Sehne, so kann man nach dem früher gesagten den Werth von $f(0)-f(1)$ zwischen zwei Grenzen einschliessen, was zu einfach ist, als dass ein Beispiel nöthig wäre.

Uebrigens, da die Differenzen der Geburtenmengen gleichnamiger Monate der beiden Kalenderjahre im letzten Beispiel von abwechselndem Vorzeichen sind, so ist der Fehler durch Benützung der Sehne ein sehr geringer. —

Diese Methode — nicht nur die strengste, sondern auch die einzige strenge, die mir bekannt ist unter allen indirecten — hat den Berechnungen zu Grunde gelegen, welche in dem Aufsatz: „Ueber Kinder-Sterblichkeit in Anhalt," von G. F. Knapp (Mittheilungen des herzogl. Anhaltischen stat. Bureaus, herausgegeben von Dr. A. Lange in Dessau, 1867, Nr. 2) veröffentlicht sind. Auch die directe Methode ist darin theilweise benützt, was besonders erwähnt ist.

Die Methode, wonach Heym die in einem Zeitraum verstorbenen, welche einer Altersclasse angehören, bearbeitet hat — auf welche die Anhaltische Methode anwendbar ist — um die Kindersterblichkeit zu finden, ist noch nicht veröffentlicht. Die Andeutungen darüber sind so spärlich, dass man nichts daraus sehen kann (vergl. Zeitschrift des stat. Bureaus des k. sächs. Ministerium des Innern. Jahrgang 1863, Nr. 11 und 12, Seite 142).

Drittes Capitel.

Von den Durchschnittsaltern.

Die hauptsächlichste Bemühung derjenigen, welche das Material der Bevölkerungsstatistik bearbeiten, ist häufig nicht der Sterblichkeit nach dem Alter gewidmet. Man sucht vielmehr oft, anstatt die vielen Altersstufen einzeln zu behandeln, nach einem Mittel, um die menschliche Sterblichkeit auf einfachere Weise durch einen einzigen Quotienten, die sogen. mittlere Lebensdauer, darzustellen. Wenn auch die Anschauung, wonach sich in der mittlern Lebensdauer alles auf einmal abspiegelt – das Befinden, der Wohlstand, das Wohl und Wehe der Bevölkerung — mehr und mehr abkommt, und die Statistik dadurch von ihrem „Stein der Weisen" befreit wird, so bleibt doch noch zu untersuchen, ob und wann die mittlere Lebensdauer aus den verschiednen sogen. Durchschnittsaltern gefunden werden könne. Indessen schon gleich zu

Anfang erhebt sich hier wegen der technischen Ausdrücke eine Schwierigkeit, denn es herrscht die Unsitte, damit aufs willkürlichste zu schalten, und dem Dinge, das man hat, einstweilen den Namen desjenigen Dinges zu geben, das man sucht, als wenn so ein Ersatz entstünde. Daher zuerst von der mittlern Lebensdauer: was darunter zu verstehen ist; und dann in welcher Beziehung sie zu andern Quotienten steht, denen man allen den Gattungsnamen Durchschnittsalter beilegen darf. —

Unter der mittlern Lebensdauer versteht Moser die Zeit verlebt von einer Einheit Geborner, von der Geburt an bis zum höchsten erreichbaren Alter. Sie ist also ein aus der Absterbeordnung abgeleiteter Begriff. Da das niedrigste Alter und das höchste erreichbare darin vorkommen, so ist Moser's mittlere Lebensdauer offenbar ein besondrer Fall eines oder mehrerer allgemeinern Begriffe, in denen das Alter x' und x'' vorkommt. In der That, wenn man bedenkt, das Moser's mittlere Lebensdauer zu bezeichnen ist durch $\int\limits_0^{\omega} f(x)dx$, so sieht man sofort, dass sie ein besondrer Fall ist:

erstens, der vom Alter x' bis x'' von einer Einheit Geborner verlebten Zeit;

zweitens ist sie ein besondrer Fall des Quotienten aus dieser verlebten Zeit und der Anzahl derjenigen, die das Alter x' erreichen, also des Quotienten $\frac{1}{f(x')}\int\limits_{x'}^{x''} f(x)dx$, den man die Lebenserwartung des x'jährigen bis zum Alter x'' genannt hat und den wir die durchschnittlich von einem x'jährigen bis zum Alter x'' zu verlebende Zeit nennen müssen;

drittens endlich ist sie ein besondrer Fall der Summe, die aus dem Alter x' und der durchschnittlich zu verlebenden Zeit gebildet wird, nämlich der Summe:

$$x' + \frac{1}{f(x')}\int\limits_{x'}^{x''} f(x)dx$$

Diese Summe aus dem schon erreichten Alter und der noch zu verlebenden Zeit nennen wir die mittlere Lebensdauer des x'jährigen bis zum Alter x''. Sobald $x' = 0$ und $x'' = \omega$ gewählt wird, erhält man das, was Moser unter der mittlern Lebensdauer schlechthin versteht.

Wie die mittlere Lebensdauer direct nachgewiesen werden kann, bedarf kaum der Erinnerung: man weiss, wie die verlebte Zeit nachgewiesen wird (siehe Gleichung 22. ff.) und wie man die Grösse $f(x')$ findet; und wie diese Grössen zu verbinden seien, das ist in der Definition der mittlern Lebensdauer ausgesagt. —

Noch ein andrer Begriff, der gleichfalls aus der Absterbeordnung hervorgeht und der mit dem vorigen in besondern Fällen identisch ist, wäre hier zu besprechen: das durchschnittliche Alter der x' bis x''jährig verstorbenen aus einer Einheit Geborner. So soll in Kürze das summirte Alter jener Verstorbenen,

dividirt durch die Anzahl derselben, genannt werden. Mit Hilfe des am Anfang des fünften Capitels gesagten muss es bezeichnet werden durch:

$$-\frac{1}{f(x')-f(x'')}\int_{x'}^{x''} x.\, f'(x).\, dx = \frac{1}{f(x')-f(x'')}\left\{x'.\, f(x') - x''.\, f(x'') + \int_{x'}^{x''} f(x)dx\right\}$$

Durch Vergleichung dieses Quotienten mit der mittlern Lebensdauer des x'jährigen bis zum Alter x'' ergibt sich: für $x'' = \omega$ ist die mittlere Lebensdauer des x'jährigen identisch mit dem durchschnittlichen Alter der x' bis ωjährig verstorbenen.

Für andre Werthe von x'' sind aber die beiden Quotienten höchst wesentlich von einander verschieden. —

Diese Quotienten, die aus der Betrachtung der Absterbeordnung entstehen, vergleicht man häufig mit Durchschnittsaltern, die aus dem Material der Bevölkerungsstatistik berechnet werden, und behauptet, die letzteren könnten zum Ersatz der ersteren dienen, entweder geradezu oder doch unter gewissen Bedingungen. Eine Menge von Streitfragen sind darüber entstanden, wovon die folgenden vielleicht am wichtigsten sind: in welcher Beziehung steht das durchschnittliche Alter der aus einer Bevölkerung in einem Zeitraum verstorbenen zu den Grössen, die als „mittlere Lebensdauer" und „durchschnittliches Alter der Verstorbenen" aus der Absterbeordnung abgeleitet werden.

Die Darstellung, deren wir uns bisher bedienten, wird auch bei der Untersuchung dieser Frage ihre Dienste nicht verweigern.

Unter dem durchschnittlichen Alter der x'' bis x'jährig von t' bis t'' in einer Bevölkerung verstorbenen verstehen wir den Quotienten, den man erhält, wenn man das summirte Alter jener Verstorbenen dividirt durch die Anzahl derselben; also ${}_{t-x''}^{t-x'}AM_{t'}^{t''}$ (Gleichung 26.) dividirt durch ${}_{t-x''}^{t-x'}M_{t'}^{t''}$ (vergl. Gleichung 9. oder 11.). —

Fragen wir zuerst, wann dies durchschnittliche Alter identisch sei mit dem durchschnittlichen Alter der x' bis x''jährig verstorbenen aus einer Einheit Geborner. Da die Grössen, woraus der erstere dieser Quotienten gebildet werden soll, von der Geburtenfolge abhängig sind, während der letztere Quotient blos von der Beschaffenheit der Absterbeordnung abhängt, so wird die Identität beider nur eintreten, wenn die Geburtenfolge gewissen Bedingungen genügt, also nicht für alle bevölkerten Gebiete, sondern für gewisse bevölkerte Gebiete, wie sie vielleicht in Wirklichkeit gar nicht vorkommen.

Um die Bedingungen zu finden, müssen wir die Gleichungen für das summirte Alter und für die Anzahl der Verstorbenen aus einer Bevölkerung näher ins Auge fassen. Jedoch vorher einige abkürzende Bezeichnungen und einige Bemerkungen über einzelne Ausdrücke, die in jenen Gleichungen vorkommen.

Schreibt man $F(t''-x')-F(t'-x') = \varphi(x')$

und $F(t''-x'')-F(t'-x'') = \varphi(x'')$

— die Grössen kommen sowohl in Gleichung 26. als auch in 9. oder 11. vor — so ist:

$$\varphi(x'') - \varphi(x') = -\int_{t_0=t'-x''}^{t_0=t'-x'} \left\{ F'(t_0+t''-t') - F'(t_0) \right\} dt_0$$

Ferner setze man in Gleichung 9. oder 11. die Grösse:

$$\int_{t_0=t'-x''}^{t_0=t'-x'} F'(t_0).\, f(t'-t_0)dt_0 - \int_{t_0=t''-x''}^{t_0=t''-x'} F'(t_0).\, f(t''-t_0)dt_0 = -\int_{t_0=t'-x''}^{t\ =t'-x'} \left\{ F'(t_0+t''-t') - F'(t_0) \right\} f(t'-t_0)dt_0 = -Q$$

und endlich in Gleichung 26. die Grösse:

$$\int_{t_0=t'-x''}^{t_0=t'-x'} F'(t_0) \left\{ (t'-t_0).\, f(t'-t_0) + \int_{x=t'-t_0}^{x=x''} f(x)dx \right\} dt_0 - \int_{t_0=t''-x''}^{t_0=t''-x'} F'(t_0) \left\{ (t''-t_0).\, f(t''-t_0) + \int_{x=t''-t_0}^{x=x''} f(x)dx \right\} dt_0$$

$$= -\int_{t_0=t'-x''}^{t_0=t'-x'} \left\{ F'(t_0+t''-t') - F'(t_0) \right\} \left\{ (t'-t_0).\, f(t'-t_0) + \int_{x=t'-t}^{x=x''} f(x)dx \right\} dt_0 = -P$$

worin $\varphi(x')$, $\varphi(x'')$, Q und P ganz willkürliche, nur zur Abkürzung eingeführte Bezeichnungen sind. Bedient man sich dieser Bezeichnungen, so kann man, nach Gleichung 26, schreiben:

$${}^{t-x'}_{t-x''}AM^{t''}_{t'} = \varphi(x').\, \left\{ x'.\, f(x') + \int_{x'}^{x''} f(x)dx \right\} - \varphi(x'').\, x''.\, f(x'') - P$$

und nach Gleichung 9. oder 11:

$${}^{t-x'}_{t-x''}M^{t''}_{t'} = \varphi(x').\, f(x') \qquad - \varphi(x'').\, f(x'') \qquad - Q$$

Will man nun die Bedingung finden, unter der das durchschnittliche Alter der x'' bis x'jährig von t' bis t'' verstorbenen gleich ist dem durchschnittlichen Alter der x' bis x''jährig verstorbenen aus einer Einheit Geborner, so hat man nur die beiden Grössen einander gleichzusetzen und findet so, wenn man die Gleichung auf Null reducirt, folgendes:

$$\left\{ \varphi(x'') - \varphi(x') \right\} \left[f(x'').\, \left\{ x'.\, f(x') + \int_{x'}^{x''} f(x)dx \right\} - f(x').\, x''.\, f(x'') \right]$$

$$+ Q.\, \left[x'.\, f(x') - x''.\, f(x'') + \int_{x'}^{x''} f(x)dx \right] - P.\, \left\{ f(x') - f(x'') \right\} = 0$$

worin die erforderliche Beziehung zwischen Absterbeordnung und Geburtenfolge gegeben ist.

Insbesondre ist die Gleichung erfüllt, wenn

erstens: $\varphi(x'') - \varphi(x') = 0$, das heisst von $t'-x''$ bis $t''-x''$ ebensoviele geboren sind, als von $t'-x'$ bis $t''-x'$;

zweitens: $Q = 0$, das heisst die Altersclasse der x'' bis x'jährigen zur Zeit t'' ebenso zahlreich ist als zur Zeit t';

drittens: $P = 0$, das heisst das summirte Alter plus der bis zum Alter x'' zu verlebenden Zeit derjenigen Individuen, die zur Zeit t'' im Alter x'' bis x' stehen, gleich ist demselben für diejenigen Individuen, welche zur Zeit t' im Alter x'' bis x' standen.

Um zu prüfen, ob dieser besondre Fall der Erfüllung vorliegt, bedarf man Geburtsregister; Volkszählung nach dem Alter zur Zeit t' und zur Zeit t''; Register über die Verstorbenen von der Zeit t' bis zur Zeit $t''+(x''-x')$, um daraus die verlebte Zeit, die unter „drittens" erwähnt ist, darzustellen (nach der Analogie, wie im Capitel 5 gezeigt). In den wenigsten Fällen wird man alle Mittel zur Prüfung haben, in den meisten Fällen wird sich aber zeigen, dass die nöthigen Bedingungen nicht erfüllt sind, dass man also das durchschnittliche Alter der x'' bis x'jährig von t' bis t'' verstorbenen nicht für identisch halten muss mit dem durchschnittlichen Alter der x' bis x''jährig verstorbenen aus einer Einheit Geborner.

Freilich ist es möglich, dass die Bedingungsgleichung auch in andrer als dieser besondern Weise erfüllt sei. Es ist möglich, dass das durchschnittliche Alter der aus einer Bevölkerung u. s. w. verstorbenen gleich sei dem durchschnittlichen Alter der u. s. w. verstorbenen aus einer Einheit Geborner, ohne dass gerade die unter erstens, zweitens und drittens genannten Bedingungen erfüllt sein müssten. Aber ob es der Fall sei oder nicht, lässt sich dann nicht nachweisen, weil anzunehmen ist, dass man den Verlauf der Absterbeordnung von x' bis x'' nicht kennt, während man ihn doch kennen müsste, um zu prüfen, ob die Bedingungsgleichung anders als in der besondern Weise erfüllt ist. Daher hat die besondere Weise der Erfüllung ein so grosses Interesse, dass wir noch näher darauf eingehen:

Man sieht, dass weder $\varphi(x'')-\varphi(x') = 0$, noch $Q = 0$, noch $P = 0$ möglich ist, wenn die Differenz $F'(t_0+t''-t')-F'(t_0)$ von $t_0 = t'-x''$ bis $t_0 = t'-x'$ fortwährend positive oder fortwährend negative Vorzeichen hat; wenn also die Geburtendichtigkeit von $t_0 = t'-x''$ bis $t_0 = t'-x'$ so beschaffen ist, dass sie in jedem Zeitpunct entweder immer kleinere oder immer grössere Werthe darbietet, als in dem entsprechenden Zeitpunct, der um $t''-t'$ Einheiten später liegt. Es müssen vielmehr die Vorzeichen der Differenz entweder wechselnde sein, in einer Weise, die von der Absterbeordnung abhängt; oder die Differenz muss fortwährend den Werth Null annehmen, damit die Erfüllung der Bedingungsgleichung eintrete.

Also wenn dieselben Werthe der Geburtendichtigkeit in derselben Reihenfolge, wie sie von $t_0 = t'-x''$ bis $t_0 = t'-x'$ auftreten, gleichfalls auftreten von $t_0 = t''-x''$ bis $t_0 = t''-x'$, dann ist jedenfalls die besondre Erfüllung der Bedingung vorhanden; also bei periodischen Werthen der Geburtendichtigkeit; z. B. bei constanter Geburtendichtigkeit.

Wählt man $x'' = \omega$, so vereinfacht sich die Bedingung in die folgende, weil $f(\omega) = 0$ ist:

$$Q.\left\{x'.f(x') + \int_{x'}^{\omega} f(x)dx\right\} - P.f(x') = 0$$

und hier ist die Erfüllung insbesondre nachweisbar, wenn $Q = 0$ und $P = 0$; das heisst wenn die Individuen zwischen dem Alter ω und x' zur Zeit t'' ebenso zahlreich sind, als zur Zeit t'; und wenn zweitens das summirte Alter plus der bis zum Alter ω zu verlebenden Zeit ebenso gross ist für die Individuen, welche zur Zeit t'', wie für diejenigen welche zur Zeit t' im Alter ω bis x' stehen. Die besondre Erfüllung ist unvereinbar mit fortwährend steigender oder fortwährend fallender Geburtendichtigkeit. Je grösser der Zeitraum ist, aus welchem die Gestorbenen entnommen werden, das heisst je grösser die Differenz $t''-t'$ ist, desto sicherer bewahrt aber (auf bevölkerten Gebieten, wie die unsrigen, wo die Geburtendichtigkeit im Wachsen ist) die Differenz $F'(t_0+t''-t') - F'(t_0)$ fortwährend ihr positives Vorzeichen; desto weniger Hoffnung hat man, dass die Bedingungsgleichung nachweisbar erfüllt sei. Dass periodische, insbesondre constante Werthe der Geburtendichtigkeit auf wirklichen bevölkerten Gebieten nicht vorkommen, bedarf keines Beweises für den, der jemals tabellarische Zusammenstellungen über Geborne gesehen hat, sodass also dieser Weg der Erfüllung von vorn herein verlegt ist. —

Ganz ähnlich untersuchen wir nun, wann das durchschnittliche Alter der x'' bis x'jährig von t' bis t'' verstorbenen gleich der mittlern Lebensdauer des x'jährigen bis zum Alter x'' ist. Indem wir von derselben Bezeichnung Gebrauch machen, setzen wir wieder den einen Quotienten dem andern gleich, und erhalten so die Bedingungsgleichung, die wir wieder auf Null reduciren. Man erhält folgende Bedingung:

$$\varphi(x'').f(x'')\left\{x'.f(x') - x''.f(x'') + \int_{x'}^{x''} f(x)dx\right\} + Q.\left\{x'.f(x') + \int_{x'}^{x''} f(x)dx\right\} - P.f(x') = 0$$

Sobald x'' nicht gleich ω ist, kann diese Bedingung jedenfalls nicht erfüllt werden für $Q = 0$ und $P = 0$, denn der Ausdruck, welcher dann auf der linken Seite übrig bleibt, ist ein Product aus drei Factoren, wovon keiner gleich Null ist. Insbesondre also ist für periodische, spezieller noch für constante Geburtendichtigkeit durchaus unmöglich, dass das berechnete durchschnittliche Alter gleich der mittlern Lebensdauer sei. Wenn Q nicht gleich Null und P nicht gleich Null ist, so kann die Bedingung erfüllt sein, aber man hat kein Mittel, die Erfüllung zu prüfen.

Ist hingegen $x'' = \omega$, sodass $f(x'') = 0$, so fällt der erste Ausdruck auf der linken Seite weg und es bleibt nur die einfache Bedingung übrig:

$$Q.\left\{x'.f(x') + \int_{x'}^{\omega} f(x)dx\right\} - P.f(x') = 0$$

deren besondre Erfüllung (durch $Q = 0$ und $P = 0$) geprüft werden kann. Dieselbe Bedingung, die oben schon erschienen war, musste hier wiederkehren, denn wie früher erwähnt ist die mittlere Lebensdauer des x'jährigen bis zum Alter ω identisch dem durchschnittlichen Alter der x' bis ωjährig verstorbenen aus einer Einheit von Gebornen.

Endlich, wenn man noch $x' = 0$ wählt, sodass $f(x') = 1$, so ist die Bedingung:

$$Q.\int_0^\omega f(x)dx - P = 0$$

deren Erfüllung geprüft werden kann, wenn $Q = 0$ und $P = 0$, das heisst wenn erstens die Volkszahl zur Zeit t'' ebenso gross ist, als zur Zeit t'; und wenn zweitens das summirte Alter plus der bis zum Alter ω zu verlebenden Zeit für die Individuen, welche zur Zeit t'' leben, ebenso gross ist, wie für die Individuen, welche zur Zeit t' leben. —

Man wird hiernach einsehen, welche Wichtigkeit den Schlüssen beizulegen ist, welche man aus dem durchschnittlichen Alter der Verstorbenen eines Zeitraums, die einem bevölkerten Gebiete entnommen sind, zu ziehen wagt auf die mittlere Lebensdauer: nämlich gar keine Wichtigkeit ist ihnen beizulegen. Das durchschnittliche Alter der auf einem bevölkerten Gebiet Verstorbenen ist begrifflich etwas durchaus anderes, als die mittlere Lebensdauer; es ist abhängig von der Geburtenfolge, sein Kleiner- und Grösserwerden kann die Wirkung der Geburtenfolge sein, während man irriger Weise Aenderungen der Sterblichkeit daraus folgert, wenn man es mit der mittlern Lebensdauer verwechselt, die wieder von der Geburtenfolge ganz und gar unabhängig ist. Nichts ist so sehr geeignet, den letzten Schein von Klarheit aus der Bevölkerungsstatistik zu vertreiben und alles in ein undurchdringliches Wirrsal zu verwandeln, als wenn man zwei so grundverschiedene Dinge nicht unterscheidet. Hier zeigt sich die Nothwendigkeit einer Theorie: denn es kann auf die Dauer nicht genügen, wenn man die Verschiedenheit nur ahnt, sondern es muss genauer gesagt werden, worin sie liegt. Das ist in den obigen Gleichungen geschehen.

Damit das durchschnittliche Alter der Verstorbenen der mittlern Lebensdauer identisch werde, was es, wie gesagt, im allgemeinen nicht ist, müssen gewisse Bedingungen erfüllt sein; gewisse Beziehungen zwischen Geburtendichtigkeit und Absterbeordnung müssen bestehen; ob sie bestehen, kann man nur in besondern Fällen prüfen, meistens bestehen sie nicht, und dann hat man absolut keinen Grund, anzunehmen, dass das Durchschnittsalter der Verstorbenen gleich der mittlern Lebensdauer sei. Seit Engel's Abhandlung: Sterblichkeit und Lebenserwartung in Preussen (Zeitschrift des k. pr. stat. Bureaus), ist die Frage vielfach besprochen worden. Engel sowohl als seine Kritiker sind schon der Ansicht, dass hier zu unterscheiden sei. Es ist also nicht gerade neu, was oben als Ergebniss mitgetheilt wird, soweit als das Ergebniss verneint.

Aber es kommt nicht sowohl darauf an, dass etwas richtiges behauptet werde; sondern für die Theorie ist erst dann gesorgt, wenn das Richtige in der richtigen Beschränkung und gestützt durch richtige Gründe gesagt ist. Daher darf man auch auf allgemein beseitigte Vorurtheile zuweilen wieder zu neuem Angriff zurückkehren. —

Bei dieser Gelegenheit sei auch das durchschnittliche Alter derjenigen erwähnt, die zu einem gewissen Zeitpunct leben; so nennen wir das summirte Alter der in einem Zeitpunct lebenden, dividirt durch die Anzahl derselben. Der Dividend ist demnach (wenn t' der Zeitpunct ist und die Lebenden vom Alter x'' bis x' gemeint sind):

$$\sum_{t'-x''}^{t'-x'} A\, V(t') = \int_{t_0 = t'-x''}^{t_0 = t'-x'} F'(t_0).\ (t'-t_0).\ f(t'-t_0)dt_0$$

und der Divisor:

$$\sum_{t'-x''}^{t'-x'} V(t') = \int_{t_0 = t'-x''}^{t_0 = t'-x'} F'(t_0).\ f(t'-t_0)dt_0$$

Nichts kann so deutlich sein, als dass das durchschnittliche Alter der Lebenden des Alters x'' bis x' zur Zeit t' abhängt: von der Geburtendichtigkeit, welche von $t_0 = t'-x''$ bis $t_0 = t'-x'$ stattfand; und von den Werthen der Absterbeordnung vom Alter x' bis x''. Dieses durchschnittliche Alter ist ganz und gar ungeeignet, um daraus Schlüsse über Sterblichkeit zu ziehen. Engel empfiehlt es a. a. O. ganz mit Unrecht, und ohne irgend einen Beweis dafür zu bringen. Es ist deshalb ungeeignet, weil man vielleicht Veränderungen, die in der Geburtenvertheilung ihren Grund haben können, als Wirkung der Sterblichkeit auslegt. Es ist durchaus ohne alle Beziehung zur mittlern Lebensdauer. Es geht nicht einmal unter der Annahme constanter Geburtendichtigkeit in die mittlere Lebensdauer über (was doch beim Durchschnittsalter der Verstorbenen der Fall ist), sondern in eine andere, gleichfalls aus der Absterbeordnung ableitbare Grösse, die nicht ganz ohne Interesse ist. Es sei daher erlaubt, noch einen Augenblick dabei zu verweilen.

Wenn von $t_0 = t'-x''$ bis $t_0 = t'-x'$ die Geburtendichtigkeit einen constanten Werth hat, so tritt dieser Werth vor das Summenzeichen, sowohl im Dividenden als im Divisor, und fällt durch die Division weg. Man erhält dann als durchschnittliches Alter der Lebenden:

$$\int_{x'}^{x''} x.\ f(x).\ dx \text{ dividirt durch } \int_{x'}^{x''} f(x)dx.$$

Wenn man auf den erhaltenen Dividenden die Integration durch Theilung anwendet, so ist:

$$\int_{x'}^{x''} x.\ f(x).\ dx = x'.\int_{x'}^{x''} f(x)dx + \int_{x'}^{x''} dx \int_{x}^{x''} f(x)dx$$

Dies eingeführt, hat man für das durchschnittliche Alter der Lebenden eines Zeitpunctes den Ausdruck:

$$x' + \frac{\int_{x'}^{x''} dx \int_{x}^{x''} f(x)dx}{\int_{x'}^{x''} f(x)dx}$$

während die mittlere Lebensdauer gleich:

$$x' + \frac{\int_{x'}^{x''} f(x)dx}{f(x')}$$

ist (vergl. Seite 98).

Also nicht einmal bei constanter Geburtendichtigkeit geht das durchschnittliche Alter der Lebenden in die mittlere Lebensdauer über.

Man hat nun folgenden Zusammenhang der verschiedenen Grössen, die aus der Absterbeordnung abgeleitet sind:

Erstens: die im Alter x sterbenden:

$$= \qquad -f'(x)dx$$

Zweitens: die das Alter x erfüllenden:

$$f(x) \quad = \quad -\int_{x}^{\omega} f'(x)dx$$

Drittens: die Zeit verlebt vom Alter x' bis x'':

$$\int_{x'}^{x''} f(x)dx = \quad -\int_{x'}^{x''} dx \int_{x}^{\omega} f'(x)dx$$

Viertens: die neue Grösse, durch die man das durchschnittliche Alter der Lebenden eines Gebietes mit constanter Geburtenvertheilung ausdrückte:

$$\int_{x'}^{x''} dx \int_{x}^{x''} f(x)dx = -\int_{x'}^{x''} dx \int_{x}^{x''} dx \int_{x}^{\omega} f'(x)dx$$

Es ist also die neue Grösse ebenso aus der verlebten Zeit entstanden, wie die verlebte Zeit aus der Zahl der Lebenden; wie die Zahl der Lebenden aus der Zahl der Verstorbenen.

Viertes Capitel.

Sogenannte Sterblichkeitsziffern.

„Ziffer“ ist der nicht gerade glücklich gewählte Ausdruck, dessen sich der Statistiker zu bedienen pflegt, wenn er von gewissen Quotienten sprechen will. Unter Sterblichkeitsziffer versteht er einen Quotienten, der gebildet wird aus einer Gesammtheit von Verstorbenen einerseits und einer Gesammtheit von gleichzeitig Lebenden andrerseits; welche Gesammtheiten, darin weichen die Statistiker von einander ab. In ganz ähnlicher Weise wird der Quotient aus einer Anzahl Geborner und aus einer Gesammtheit von gleichzeitig Lebenden gewöhnlich Geburtsziffer genannt. Auch darin herrscht Verschiedenheit, welche Grösse als Dividend und welche als Divisor verwendet wird. In der letzten Zeit hat man aufgehört, und mit Recht, diesen Quotienten so grosse Wichtigkeit beizulegen. Aber noch ist man nicht ganz frei von günstigem Vorurtheil für dieselben,. weil sie innerhalb derselben räumlichen Gebiete ziemlich gegeringe Schwankungen zeigen. Für solche ziemlich constante Verhältnisse hat man in der Statistik von jeher eine gewisse Vorliebe. Man berechnet sie vorläufig und besinnt sich dann darüber, ob sich auch in ihnen „das Wohl und Wehe der Länder“ oder das „Schicksal der Länder abspiegle;“ ob sie „Glück oder Elend verrathen;“ ob sie auf „Prosperität“ hindeuten; ob sie Schlüsse auf die „sittliche Cultur“ zulassen oder auf den „socialen Zustand;“ ob sie eine „Function des Wohlstandes“ seien u. s. w. — lauter so allgemein und desshalb so unbestimmt gestellte Fragen, dass sie eigentlich gar nicht beantwortet werden können. Ganz selten oder nie wird untersucht, wovon die Grössen wirklich abhängen, aus denen man die Quotienten herstellt; sobald aber das untersucht ist, lässt sich über die Bedeutung derselben nicht mehr streiten.

Wenden wir uns zuerst zu dem Quotienten, der gebildet wird aus den x'' bis x'jährig verstorbenen eines Zeitraums (von t' bis t''), und der Zahl der x'' bis x'jährig lebenden am Anfang des Zeitraums. Als Dividenden hätte man: ${}^{t-x'}_{t-x''}M^{t''}_{t'}$, als Divisor ${}^{t'-x'}_{t'-x''}V(t')$. Der Dividend hängt ab, nicht nur von den Werthen der Absterbeordnung zwischen dem Alter x' und x'', sondern auch von der Geburtenvertheilung zwischen $t_0 = t' - x''$ und $t_0 = t'' - x'$. Der Divisor hängt ab von denselben Werthen der Absterbeordnung und von der Geburtenfolge zwischen $t_0 = t' - x''$ und $t_0 = t' - x'$.

Der Quotient, den man aus beiden Grössen herstellt, hängt also nicht nur ab von den Werthen der Absterbeordnung, sondern auch von der Geburtenfolge, es ist also ganz und gar unerlaubt, aus der Grösse des Quotienten Schlüsse zu ziehen auf die Sterblichkeit.

Gesetzt es sei die Geburtendichtigkeit von $t'-x''$ bis $t''-x'$ eine constante Grösse (was sie niemals ist) so nimmt der Quotient, dessen Dividend ${}_{t-x''}^{t-x'}M_{t'}^{t''}$, dessen Divisor ${}_{t'-x''}^{t'-x'}V(t')$ ist, folgende Gestalt an:

$$(t''-t').\ \left\{\frac{1}{f(x')-f(x'')}\int_{x'}^{x''} f(x)dx\right\}^{-1}$$

das heisst er erscheint als ein Product, dessen einer Factor die Dauer des Zeitraums ist, woraus die Verstorbenen entnommen sind; der andre Factor ist der reciproke Werth eines Quotienten, der nur in besondern Fällen als mittlere Lebensdauer angesehen werden darf. Nämlich für $x''=\omega$ und $x'=0$ verwandelt sich der zuletzt entwickelte Ausdruck in:

$$(t''-t').\ \left\{\int_0^{\omega} f(x)dx\right\}^{-1}$$

das heisst dann ist die Sterblichkeitsziffer das Product aus der Dauer des Zeitraums und dem reciproken Werth der mittlern Lebensdauer. Der Satz ist ohne jede praktische Bedeutung, denn constante Geburtendichtigkeit kommt nicht vor während eines so langen Zeitraums, als hier erforderlich wäre — nämlich während einer Zeit von $t''-t'+\omega$, also mehr als hundert Jahren.

Wenn man unter Geburtsziffer den Quotienten versteht, der gebildet wird, indem man die Zahl der von t' bis t'' Gebornen dividirt durch die Volkszahl zur Zeit t', so ist dieser Quotient abhängig: von der Geburtenmenge in der Zeit t' bis t'' (wie diese Menge vertheilt ist, bleibt ohne Einfluss); von der Geburtenfolge in der Zeit $t'-\omega$ bis t'; und von der Beschaffenheit der Absterbeordnung in ihrer ganzen Erstreckung, vom Alter 0 bis ω.

Lässt man wieder von $t'-\omega$ bis t' die Geburtendichtigkeit constant sein, etwa $F'(t_0)=a$; und nimmt man ferner an $F(t'')-F(t')=a(t''-t')$; so erhält man als Geburtsziffer den Ausdruck:

$$(t''-t').\ \left\{\int_0^{\omega} f(x)dx\right\}^{-1}$$

Es ist also richtig, dass bei constanter Geburtendichtigkeit die Geburts- und Sterblichkeitsziffer einander gleich sind; dass sie proportional der Dauer des Zeitraums sind, woraus die Gebornen resp. Verstorbenen entnommen wurden, und umgekehrt proportional der mittlern Lebensdauer: aber diese Sätze sind ohne den geringsten praktischen Nutzen. Man hat sie längst gekannt, aber nicht scharf genug gefasst, indem man von constanter Bevölkerung, von jährlich gleicher Geburtenmenge und ähnlichem sprach, während ausser einer herrschenden Absterbeordnung nichts erforderlich ist, als eine constante Geburtendich-

tigkeit. Unveränderliche Volkszahl, jährlich gleiche Geburtenmengen u. s. w. folgen dann von selbst aus den Annahmen, sind aber für sich weder hinreichende noch nothwendige Bedingungen, damit die Sätze gelten. —

Neuerdings, nachdem die Ansicht, dass aus der Sterblichkeitsziffer, berechnet für ein wirkliches Gebiet, die mittlere Lebensdauer gefunden werden könne, fast keine Anhänger mehr zählt, hat man vorgeschlagen, die Gebornen und Verstorbenen eines Zeitraums mit der Volkszahl während des Zeitraums in eine solche Verbindung zu bringen, dass daraus auf die Wahrscheinlichkeit geschlossen werden könne, die ein Individuum jenes Gebietes hat, einen gegebenen Zeitraum zu durchleben. Dieser Vorschlag scheint mir kein Fortschritt zu sein, sondern vielmehr Verwirrung zu stiften, indem ein technischer Ausdruck von ganz bestimmter Bedeutung auf etwas ihm durchaus fremdes angewendet wird. Folgendes diene zur Erläuterung:

Bekanntlich nennt man den Quotienten $\frac{f(x'')}{f(x')}$ die Wahrscheinlichkeit des x'jährigen, dass er das Alter x'' erreiche; und den Quotienten $\frac{f(x')-f(x'')}{f(x')} = 1 - \frac{f(x'')}{f(x')}$ die Wahrscheinlichkeit des x'jährigen, dass er vor Erreichung des Alters x'' sterbe. Die Wahrscheinlichkeit, ein Alter zu erreichen oder nicht zu erreichen, wird überall nur gemessen nach den Erfahrungen, die man über das Absterben einer Einheit von Gebornen nach dem Alter gemacht hat. Wenn nun gefragt wird, welche Wahrscheinlichkeit jemand habe, den Zeitraum von t' bis t'' zu durchleben, so lässt sich darauf, ohne irgend eine Aenderung im Sinne der technischen Ausdrücke, eine ganz bestimmte Antwort geben. Wenn nämlich das Individuum zur Zeit t_0 geboren ist, so hat es zur Zeit t' das Alter $t'-t_0$, zur Zeit t'' das Alter $t''-t_0$; seine Wahrscheinlichkeit zur Zeit t', dass es die Zeit t'' erlebe, ist also $\frac{f(t''-t_0)}{f(t'-t_0)}$; seine Wahrscheinlichkeit inzwischen zu sterben ist $1 - \frac{f(t''-t_0)}{f(t'-t_0)}$; es muss also nur noch gegeben sein, wann das Individuum geboren ist, so lässt sich die Aufgabe bei bekannter Absterbeordnung ohne weiteres lösen.

Wenn nun die Wahrscheinlichkeit gesucht wird, die ein Preusse am Anfang des Kalenderjahres 1852 hat, dass er dieses Kalenderjahr durchlebe, so muss noch gegeben sein, wann der Preusse geboren sei. Wenn das nicht gegeben ist, so hat die Frage keinen Sinn, solange man den Ausdruck „Wahrscheinlichkeit zu leben“ in dem Sinne nimmt, wie es im Versicherungswesen geschieht. Eine allgemeine Wahrscheinlichkeit, dass ein Preusse das Kalenderjahr 1852 durchlebe, gibt es nicht, denn am Anfang des Kalenderjahres 1852 hat jeder Preusse ein andres Alter.

Hieraus geht hervor: die Wahrscheinlichkeit, dass der Bewohner eines Gebietes diesen oder jenen Zeitraum durchlebe, ist nur ein besondrer Fall der Wahrscheinlichkeit des x'jährigen, das Alter x'' zu erreichen, und ist, wenn die

Geburtszeit des Bewohners gegeben wird, nicht anders als mit Hilfe der Absterbeordnung zu berechnen.

Sobald man anders als mit Hilfe der Absterbeordnung die Wahrscheinlichkeit berechnen will, diesen oder jenen Zeitraum zu durchleben, so nimmt man das Wort Wahrscheinlichkeit in einem andern, als dem ein für alle Male feststehenden Sinne. Es gibt insbesondre in der Bevölkerungsstatistik keine Lebenswahrscheinlichkeit besondrer Art, die neben der Lebenswahrscheinlichkeit des Versicherungswesens selbständig bestünde. Die Bevölkerungsstatistik kann nur, ebenso wie die Versicherungsanstalten, das Material liefern, um die Absterbeordnung daraus zu finden, aus der man, sei sie so oder so gefunden, die Lebenswahrscheinlichkeiten berechnen kann. So wenig das Versicherungswesen die Lebenswahrscheinlichkeit eines Individuums angeben kann, wenn man nicht weiss, wie alt es ist, so wenig kann es die Bevölkerungsstatistik.

Nun macht Heym einen durchaus anders gearteten Vorschlag, wie man die Wahrscheinlichkeit ein Kalenderjahr zu durchleben berechnen könne; und da Heym bei Gelegenheit der Sterblichkeitsziffer hierauf zu reden kommt, so können wir nicht umhin, die Sache hier zu besprechen. Heym knüpft den Vorschlag an eine seiner früheren Untersuchungen an, die deshalb hier in Kürze erwähnt werden muss (nach Fischer, Grundzüge etc. § 32).

Die Versicherungsanstalten zeichnen nämlich sorgfältig auf, wie viele von einer Gesammtheit von $x$jährigen ihrer Mitglieder das Alter $x+1$ erreichen. Nun kommt es aber vor, dass Mitglieder, welche zwischen dem Alter x und $x+1$ stehen, aus der Gesellschaft, ohne gestorben zu sein, austreten und dadurch aus dem Gesichtskreis der Anstalt verschwinden. Dieser Umstand ist sehr störend, sobald man aus den Aufzeichnungen der Anstalt die Sterblichkeit nach dem Alter berechnen will.

Um dennoch aus solchen Aufzeichnungen die Wahrscheinlichkeit W zu berechnen, dass ein $x$jähriger das Alter $x+1$ erreiche, verfuhr Heym wie folgt: Man setze voraus, dass die zwischen dem Alter x bis $x+1$ ausgeschiedenen, deren Anzahl β sei, sich proportional dem fortschreitenden Alter vertheilen; und dass die Sterbefälle, deren Zahl α sei, sich gleichfalls proportional dem fortschreitenden Alter vertheilen. Das Ausscheiden erfolge jedesmal am Anfang, das Sterben am Ende jedes unendlich kleinen Alterszuwachses. Dann lässt sich die Wahrscheinlichkeit leicht darstellen, dass man einen unendlich kleinen Alterszuwachs durchlebe, dessen Anfang man erreicht hat. Das Product aller der einzelnen Wahrscheinlichkeiten für jeden unendlich kleinen Altersabschnitt ist gleich der Wahrscheinlichkeit W, die man sucht, und man findet auf diese Weise

$W = \left\{1 - \frac{\alpha+\beta}{L}\right\}^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$ worin L die Zahl der $x$jährigen bezeichnet.

Soweit die frühere Untersuchung Heym's. Im Anschluss daran schlägt er vor (Rundschau 1862, Seite 162), die Sterblichkeitsziffer auf eine entsprechende Weise zu berechnen. Die Individuen, die am Anfang eines Kalenderjahres

vorhanden sind — was sind sie anders als Lebende? Es stirbt ein Theil von ihnen im Laufe des Kalenderjahrs; und die neu hinzukommenden Gebornen im Laufe des Kalenderjahrs — sind sie nicht als negativ ausgeschiedene zu betrachten? Wenn also L nun die Volkszahl zu Anfang des Zeitraums bedeutet; α die daraus Sterbenden während des Zeitraums; β die Zahl der Gebornen, so bedeutet:

$$W = \left\{1 - \frac{\alpha - \beta}{L}\right\}^{\frac{\alpha}{\alpha - \beta}}$$

die Wahrscheinlichkeit eines Mitgliedes jener Bevölkerung, jenen Zeitraum zu durchleben. Nach dieser Formel verarbeite man das Material der Bevölkerungsstatistik und gebe dem Resultat die Auslegung, dass es die erwähnte Wahrscheinlichkeit bedeute. In der That berechnet Heym nach diesem seinem Vorschlag beispielsweise für Preussen:

für das Kalenderjahr 1852: $1 - W = 0{,}030\ 1861$
1855: $1 - W = 0{,}027\ 2930$
1858: $1 - W = 0{,}027\ 2578$

Während nun nach Fischer die Heymische Methode, um beim Material der Versicherungsanstalten das Ausscheiden zu berücksichtigen, an Schärfe nichts zu wünschen übrig lässt, beruht es nach meiner Ansicht auf einem Missverständniss, wenn Heym die gefundene Formel in der geschilderten Weise auf das Material der Bevölkerungsstatistik anwendet. Es liegt nämlich hier eine Verwechslung von gleichzeitig Lebenden (Volkszahl an einem gewissen Zeitpunct) mit gleichaltrig Lebenden (die x jährigen Mitglieder der Versicherungsgesellschaft) vor. Die Individuen, welche an einem bestimmten Zeitpunct durch die Volkszählung nachgewiesen werden, sind alle von verschiedenem Alter, es sind ω bis 0 jährige. Die im Laufe des Jahres sterben, gleichfalls jedem Alter angehörig, können niemals mit der Volkszahl in eine solche Beziehung gebracht werden, dass daraus eine Lebens- oder Sterbenswahrscheinlichkeit hervorginge. Es ist gar keine Analogie vorhanden mit dem Falle, wo aus einer Anzahl von Gleichaltrigen ein Theil stirbt, denn die Individuen, welche die Volkszahl bilden, sind nicht gleichaltrig. Was Heym für Preussen berechnet hat, drückt gar keine Wahrscheinlichkeit aus, da die Grössen, worauf die Rechnung angewendet ist, nicht die nöthige Beschaffenheit haben.

Ein wirklich analoger Fall, wo die Bevölkerungsstatistik von Heym's Formel Gebrauch machen könnte, wäre folgender: Man denke sich, es wäre aufgezeichnet, wie viele Individuen auf einem bevölkerten Gebiet innerhalb eines Zeitraums das Alter x' erfüllt hätten (bekanntlich finden solche Aufzeichnungen nicht statt); man hätte ferner diejenigen von diesen Individuen aufgezeichnet, welche vor Erfüllung des Alters x'' gestorben sind, und zwar innerhalb des Gebietes gestorben sind. Man wüsste jedoch, dass so und so viele

von jenen Individuen das Gebiet verlassen hätten, während sie zwischen dem Alter x' und x'' standen. Hier wäre Heym's Methode am Ort, um das Ausscheiden zu berücksichtigen.

Soll man nun sagen, was die von Heym für Preussen berechneten Grössen W bedeuten, so weiss ich es nicht. Es muss nicht jede irgendwie gefundene Zahl etwas bedeuten. Nur soviel ist ausgemacht, dass sie nicht die Wahrscheinlichkeit bedeuten, die ein Preusse hat, dieses oder jenes Kalenderjahr zu durchleben, denn nur dadurch, dass Heym die begrifflichen Eigenschaften der Grössen, womit er rechnet, ausser Acht liess, konnte er glauben, dass er eine Wahrscheinlichkeit berechne. Ferner ist noch gewiss, dass die von Heym berechnete Grösse W von der Geburtenvertheilung mit abhängig ist, denn die Volkszahl ist davon abhängig, die bei der Berechnung benützt wird. —

Wenn auch die Sterblichkeitsziffer untauglich ist zur Auffindung der mittlern Lebensdauer sowie der Wahrscheinlichkeit, einen Zeitraum zu durchleben — man wird dennoch fortfahren, die Zahl der Verstorbenen mit der Volkszahl in Verbindung zu setzen. Es ist ein unmittelbares Bedürfniss, die Zahl der Verstorbenen mit der Volkszahl zu vergleichen, es ist das erste und nächste, was Jederman thut, selbst wer von Statistik nie etwas gehört hat, sobald ihm ein auffallend starkes oder schwaches Sterben bekannt wird. Ob diesem Bestreben nicht ein vernünftiger Sinn beiwohnt? Ist denn nur die mittlere Lebensdauer und die Lebenswahrscheinlichkeit wissenswürdig, zu deren Auffindung die Sterblichkeitsziffer allerdings kein richtiger Weg ist; oder gibt es noch andre Fragen, die in der That näherungsweise richtig durch die Sterblichkeitsziffer beantwortet werden?

Ich neige mich der letztern Ansicht zu, ohne die Auffassung, die nun entwickelt werden soll, irgend Jemandem aufdrängen zu wollen oder zu können. Ich glaube, dass man das Bedürfniss, welchem durch Berechnung der Sterblichkeitsziffer Genüge geschieht, nicht richtig benannt hat und werde versuchen, eine richtigere Benennung zu finden.

Der Einwand, den man der gewöhnlichen Berechnung der Sterblichkeitsziffer macht — dass sie nämlich die Zahl der Verstorbenen eines Zeitraums nur mit der Volkszahl am Anfang des Zeitraums in Verbindung setze, während doch die Verstorbenen aus der jeweiligen Volkszahl hervorgehen; und Engel's Vorschlag, eine mittlere Volkszahl für den fraglichen Zeitraum zu berechnen, um jenem Einwand zu begegnen, sollen dabei als Richtschnur dienen.

In der gewöhnlichen Berechnung der sogenannten Sterblichkeits- und Geburtsziffer — wobei man die Zahl der Verstorbenen resp. Gebornen während eines Zeitraums dividirt durch die Volkszahl am Anfang, am Ende oder in der Mitte des Zeitraums — sehe ich nämlich den Versuch einer Näherung nach einem Ziele, das sich deutlich genug erkennen lässt, und zwar durch folgende Betrachtung. Gesetzt, man theilte den Zeitraum in kleine Abschnitte; von jedem Abschnitt wüsste man, wie viele Geborne resp. Verstorbene auf ihn ent-

fallen, und welche Volkszahl am Anfang des kleinen Abschnittes stattgefunden hat. Wenn Jemand nun das Verhältniss der Gebornen resp. Verstorbenen jedes Abschnittes zu der Volkszahl am Anfang des betreffenden Abschnittes berechnete, und die vielen so erhaltenen Verhältnisse addirte, so würden sehr viele in der so hergestellten Summe eine genauere Ermittlung der Sterblickeits- resp. Geburtsziffer des ganzen Zeitraums erblicken. Sie würden darin eine vollkommnere Sterblichkeitsziffer erkennen, der man sich durch die frühere einfachere Berechnung zu nähern versucht habe.

Vollkommener ist sie in der That: denn je kleiner die Abschnitte gewählt sind, desto geringfügiger wird der gemachte Einwand, als habe man die Verstorbenen auf eine Volkszahl bezogen, aus welcher sie gar nicht stammen.

Setzt man diese Betrachtung fort, indem man auf die Stätigkeit der Vorgänge Rücksicht nimmt, so lässt sich leicht darstellen, was die vollkommenste Sterblichkeitsziffer wäre, im Sinne desjenigen, der zugibt, dass die gewöhnliche Berechnung eine Näherung an die sogenannte vollkommnere sei. Wir erinnern uns nämlich, dass die Volkszahl zur Zeit t dargestellt wurde durch $\sum_{t-\omega}^{t-0} V(t)$; die zur Zeit t Gebornen durch $F'(t)dt$; die zur Zeit t überhaupt, also vom Alter ω bis 0, verstorbenen durch (vergl. Seite 27, II γ):

$$- dt \int_{t_0 = t-\omega}^{t_0 = t-0} F'(t_0) f'(t-t_0) dt_0$$

wofür wir der Kürze halber setzen $\sum_{t-\omega}^{t-0} M'(t)dt$. Auf Grund dieser Bezeichnungen hätte man als vollkommenste Sterblichkeitsziffer für den Zeitraum von t' bis t'' die Grösse:

$$\int_{t'}^{t''} \frac{\sum_{t-\omega}^{t-0} M'(t)dt}{\sum_{t-\omega}^{t-0} V(t)}$$

denn sie stellt die Summe dar aus den Verhältnissen der Verstorbenen jedes Augenblicks zur jeweiligen Volkszahl. Und als vollkommenste Geburtsziffer, als Summe der Verhältnisse der Gebornen jedes Zeitpunctes zur jeweiligen Volkszahl, hätte man:

$$\int_{t'}^{t''} \frac{F'(t)dt}{\sum_{t-\omega}^{t-0} V(t)}$$

Einer so berechneten Sterblichkeits- oder Geburtsziffer kann man gar nicht mehr den Vorwurf machen, dass die Verstorbenen nicht aus der Volkszahl hervorgegangen seien, auf welche man sie bezieht.

Von der Bedeutung einer solchen Sterblichkeits- und Geburtsziffer ist bis jetzt noch nichts gesagt; aber sie geht mit Leichtigkeit aus dem Verfahren hervor, und es kann, wie mir scheint, darüber nicht mehr gestritten werden,

sobald freiwillig zugegeben ist, dass man als Ziel dasjenige vor Augen habe, was wir kurz die vollkommenste Sterblichkeitsziffer nannten.

Man hat nämlich schon längst die Summe der Verhältnisse zwischen den einzelnen Zuwächsen zu dem jeweiligen Bestand als ein Mass für die Wichtigkeit der Zuwächse erkannt, als ein Mass, dessen Anwendung uns nur zu solchen Folgerungen führt, die unsern anderweitigen Ansprüchen Genüge leisten, also als ein zulässiges Mass. (In Moser's Math. Gesetzen der menschlichen Lebensdauer, Einleitung, findet sich näheres darüber.) Die Summe aus den Verhältnissen der einzelnen Zuwächse zur jeweiligen Volkszahl, von t' bis t'', wäre also auffassbar als das Mass für die Wichtigkeit der Zunahme, welche die Volkszahl von t' bis t'' erfahren hat. Die Wichtigkeit dieser Zunahme wäre demnach auszudrücken durch:

$$\int_{t'}^{t''} \frac{\sum_{t-\omega}^{t-0} V'(t)dt}{\sum_{t-\omega}^{t-0} V(t)}$$

Wenn man nun bedenkt, dass

$$\sum_{t-\omega}^{t-0} V'(t)dt = -\sum_{t-\omega}^{t-0} M'(t)dt + F'(t)dt$$

denn der Zuwachs zur Volkszahl entsteht (bei ausgeschlossner Wanderung) aus dem Zugang an Gebornen und aus dem Abgang an Verstorbenen; (die Gleichung ist ein besondrer Fall derjenigen, woraus Gleichung 11. entwickelt wurde, mit der kürzern Bezeichnung der Verstorbenen); so folgt daraus:

$$\int_{t'}^{t''} \frac{\sum_{t-\omega}^{t-0} V'(t)dt}{\sum_{t-\omega}^{t-0} V(t)} = -\int_{t'}^{t''} \frac{\sum_{t-\omega}^{t-0} M'(t)dt}{\sum_{t-\omega}^{t-0} V(t)} + \int_{t'}^{t''} \frac{F'(t)dt}{\sum_{t-\omega}^{t-0} V(t)}$$

das heisst die Wichtigkeit der Zunahme der Volkszahl ist gleich der Grösse, die wir die vollkommenste Geburtsziffer nannten, minus der Grösse, die wir die vollkommenste Sterblichkeitsziffer nannten. Demnach bedeutet die vollkommenste Geburtsziffer nichts anders, als die Wichtigkeit derjenigen Zugänge, welche die Volkszahl während des Zeitraums durch die Neugebornen für sich genommen erleidet; und die vollkommenste Sterblicheitsziffer bedeutet die Wichtigkeit der Abgänge, welche die Volkszahl während des Zeitraums durch die Sterbefälle erfährt.

Endlich kann man auf der linken Seite der Gleichung die Integration ausführen und schreiben:

$$log.\ nat.\ \frac{\sum_{t''-\omega}^{t''-0} V(t'')}{\sum_{t'-\omega}^{t'-0} V(t')} = -\int_{t'}^{t''} \frac{\sum_{t-\omega}^{t-0} M'(t)dt}{\sum_{t-\omega}^{t-0} V(t)} + \int_{t'}^{t''} \frac{F'(t)dt}{\sum_{t-\omega}^{t-0} V(t)}$$

woraus man sieht, dass bei bekannter Volkszahl für den Anfang und für das Ende des Zeitraums nur entweder die Geburtsziffer oder die Sterblichkeitsziffer berechnet zu werden braucht. Die nicht berechnete Grösse kann aus obiger Gleichung gefunden werden — jedoch genau nur bei ausgeschlossener Wanderung.

Die Geburtsziffer ist dann gleich der Sterblichkeitsziffer, wenn die Volkszahl am Ende des Zeitraums gleich der am Anfang ist (denn log. nat. 1 = 0).

Wenn man nach Engel's Vorschlag die Zahl der Gebornen resp. Verstorbenen eines Zeitraums durch das arithmetische Mittel der Volkszahl am Anfang und am Ende dividirt, so erhält man eine sehr brauchbare Näherung an die vollkommenste Geburts- und Sterblichkeitsziffer — unter der Annahme, dass während des Zeitraums die Volkszahl beständig gewachsen oder beständig gefallen sei.

Noch mehr kann man sich nähern, wenn die Vertheilung der Gebornen, die Vertheilung der Verstorbenen und die Aenderungen der Volkszahl während des Zeitraums bekannt sind.

Meistens werden diese Umstände alle nicht, oder nicht alle bekannt sein. Dann ist es kein ganz verwerfliches Auskunftsmittel über die Vertheilung der Gebornen und Verstorbenen, deren Anzahl man kennt, eine Hypothese einzuführen, z. B. die der Vertheilung proportional der Zeit, mit der Annahme, dass während des Zeitraums keine Wanderung auf die Volkszahl wirke. Es sei z. B. unter diesen Voraussetzungen die Menge der Gebornen für jede Zeiteinheit gleich β, die der Verstorbenen für jede Zeiteinheit gleich α, so ist:

$$\underset{t-\omega}{\overset{t-0}{}} V(t) = \underset{t'-\omega}{\overset{t'-0}{}} V(t') + (\beta-\alpha)(t-t')$$

und man hat für die Wichtigkeit der von t' bis t'' gebornen folgenden Ausdruck:

$$\int_{t'}^{t''} \frac{\beta . dt}{V(t') + (\beta-\alpha)(t-t')} = \frac{\beta}{\beta-\alpha} \, log. \, nat. \, \frac{V(t') + (\beta-\alpha)(t''-t')}{V(t')}$$

(mit Weglassung der selbstverständlichen Indices) und für die Wichtigkeit der von t' bis t'' verstorbenen:

$$\int_{t'}^{t''} \frac{\alpha . dt}{V(t') + (\beta-\alpha)(t-t')} = \frac{\alpha}{\beta-\alpha} \, log. \, nat. \, \frac{V(t') + (\beta-\alpha)(t''-t')}{V(t')}$$

Die so berechneten Wichtigkeiten sind übrigens für kleine Zeiträume ausserordentlich wenig von der gewöhnlichen Geburtsziffer resp. Sterblichkeitsziffer verschieden; die Beziehung zu Heyms W liegt nahe.

Es verlohnt sich kaum, ein Beispiel anzuführen: die ganze Frage ist nur berührt, um eine richtigere Auslegung des so häufig berechneten, so häufig missbrauchten Geburts- und Sterblichkeitsziffer zu versuchen; möge es durch Anknüpfung an den Begriff „der Wichtigkeit“ gelungen sein.

Fünftes Capitel.

Literatur. Schluss.

Es sind nicht wenige Schriften, welche sich mit denselben Fragen beschäftigt haben, auf die unsere Aufmerksamkeit im zweiten Abschnitt der vorliegenden Arbeit gerichtet war.

Vor allem ist die Kritik der gewöhnlich empfohlenen Methoden, um die Absterbeordnung zu finden, die Kritik der Mortalitätstafeln, wie man sich meistens ausdrückt, ziemlich weit vorgeschritten. Ganz besonders hat Moser in seinem schon oft genannten Werk: „die mathem. Gesetze der menschlichen Lebensdauer, 1839“ einen neuen Anstoss gegeben, indem er streng in der Sache, mild in der Form die Schwächen der sogenannten Halley'schen und Eulerischen Methode nachwies und das Material der Versicherungsgesellschaften auszubeuten lehrte. Nach ihm hat Fischer in seinen „Grundzügen des auf menschliche Sterblichkeit gegründeten Versicherungswesens, 1860 denselben Gegenstand mit weniger Nachsicht und noch grösserer Strenge wieder aufgenommen und dadurch einen gewissen Abschluss herbeigeführt. Beiden Schriftstellern lag jedoch die Bevölkerungsstatistik ziemlich fern: sie verwerfen zwar mit Recht die bevölkerungsstatistischen Methoden, welche sie vorfanden, aber sie haben sich bei der Kritik derselben noch nicht los gemacht von der Vorstellung, als fänden die jährlichen Geburten auf einem Gebiete alle in einem Zeitpuncte statt; sie haben noch nicht die Stätigkeit der Geburtenfolge berücksichtigt. Es sind daher die Voraussetzungen der zu verwerfenden Methoden nicht so richtig angegeben, als man wünschen muss, und da ihnen auch die Darstellungsmittel fehlen, durch die man ohne weiteres auf die Voraussetzungen geführt wird, so schien es nicht überflüssig, den Gegenstand noch einmal zu berühren. —

Viel schlimmer steht es um die Lehre von den verschiedenen Durchschnittsaltern und von der „Sterblichkeitsziffer.“ So viel darüber geschrieben ist, man kann sagen, dass eine hinreichend allgemeine Behandlung gänzlich fehlt. Der Grund liegt nahe genug: man hat sich nicht die Mühe gegeben zuerst und vor allem die Eigenschaften derjenigen Grössen (Gesammtheiten von Lebenden und Verstorbenen, summirtes Alter der Gesammtheiten) zu suchen, aus denen die Quotienten entstehen, die man durchschnittliches Alter, Sterblichkeitsziffer u. s. w. nannte. Wenn aber die Eigenschaften jener Grössen nicht bekannt waren — wie konnte man etwas hinreichend allgemeines über die Verbindungen der Grössen aussagen? Es war schlechterdings unmöglich. Daher schien mir der einzige Weg aus der Verwirrung der zu sein, zuerst in dem allgemeinen Theil die Eigenschaften der verschiedenen Gesammtheiten von Lebenden und Verstorbenen darzustellen. Dann mussten sich mit Leichtigkeit die Streitfragen

über die Bedeutung der daraus gebildeten Quotienten behandeln lassen. Es ist ein sehr verbreitetes Vorurtheil, nicht ausgesprochen allerdings, aber aus dem Gebrauch der meisten Statistiker hinreichend ersichtlich, als wenn die Statistik erst bei der Berechnung von Quotienten, gleichsam erst beim Dividiren, anfinge; man vergleiche die Ueberschriften, die immer von mittlerer Lebensdauer Sterblichkeitsziffer, Geburtsziffer u. s. w., also von lauter Quotienten hergenommen sind. Die Betrachtung der Grössen, bevor sie zu einer Division verwendet werden, ist durchaus ungewöhnlich. Möge die vorliegende Arbeit, besonders durch ihre Eintheilung, diese Nachlässigkeit vertreiben helfen.

Folgende Schriften dürften die wichtigsten sein, wenn man die Streitfragen über die Bedeutung der verschiedenen Quotienten kennen lernen will:

Dieterici, Ueber den Begriff der mittlern Lebensdauer und deren Berechnung für den preussischen Staat. 1858.

Wappaeus, Ueber den Begriff und die Bedeutung der mittlern Lebensdauer. 1858.

Wappaeus, Allgemeine Bevölkerungsstatistik. Erster Band, 1859. Zweiter Band, 1861.

Engel, Sterblichkeit und Lebenserwartung im preuss. Staate. Zeitschrift des k. preuss. stat. Bureaus, 1861: Nr. 13, 14, 15; 1862: Nr. 3, 9, 10.

Die neuesten Untersuchungen über die mittlere Lebensdauer (ohne Namen des Verfassers). Hildebrand's Jahrbücher, 1863. Seite 605.

Zillmer, Ueber die Geburtsziffer, Sterbeziffer, durchschnittliches Sterbealter und den Zusammenhang dieser Zahlen mit der mittlern Lebensdauer. Rundschau (Zeitschrift für das Versicherungswesen), 1863. Seite 71—78 und 112—118.

F. J. Neumann, Die Gestaltung der mittleren Lebensdauer in Preussen, 1866 (?) Habilitationsschrift.

G. Meyer, Die mittlere Lebensdauer. Hildebrand's Jahrbücher, 1867. Bd. I, worin behandelt werden:

1) die mittlere und die wahrscheinliche Lebensdauer; 2) das Durchschnittsalter der Lebenden und die Zahl der lebenden Jahre; 3) das Durchschnittsalter der Gestorbenen und die Zahl der todten Jahre; 4) die Geburts- und Sterblichkeitsziffer.

Engel, Beiträge zur Kenntniss des physischen Lebens des preussischen Volkes. Zeitschrift des k. preuss. stat. Bureaus, 1867. Nr. 1, 2, 3.

Besonders durch Engel's zuerst genannte Arbeit sind diese Fragen wieder in den Vordergrund getreten. Nicht vergeblich, denn dadurch ist es endlich zur herrschenden Lehre geworden, dass erstens Geburtsziffer und Sterblichkeitsziffer (resp. deren reciproke Werthe) nicht auf die mittlere Lebensdauer schliessen lassen; und dass zweitens das durchschnittliche Alter der in einem Zeitraum verstorbenen nicht verwechselt werden darf mit der mittlern Lebensdauer.

Gerade über letzteren Punct herrschte bei Dieterici, Wappaeus und Engel noch nicht die nöthige Klarheit.

Die späteren Schriftsteller und auch die zuletzt genannten in ihren spätern Schriften, betonen nun mehr und mehr die bestehenden höchst wesentlichen Verschiedenheiten; sie legen mehr und mehr Gewicht darauf, dass die Bevölkerungsstatistik nicht mehr auf die Berechnung dieses oder jenes einzigen Quotienten (durchschnittliches Alter, Sterblichkeitsziffer) ihre Untersuchung über Sterblichkeit beschränken dürfe; sie verlangen immer dringender, dass vielmehr die Absterbeordnung im ganzen Verlauf des Alters das Ziel dieser Untersuchungen bilden müsse. Darin macht sich ein Fortschritt entschieden bemerklich.

Indessen unter welcher Masse von Irrthum und Halbwahrheit muss man die einzelnen richtigen Ergebnisse bei allen Schriftstellern hervorsuchen! Wie ganz und gar zufällig ist alles gefunden, welche hinfälligen Beweise, meistens nur rhetorisch geführt oder an Beispielen; welche Unkenntniss der eignen Voraussetzungen, welche Ungenauigkeit, wenn man Bedingungen ausspricht, welche ungeheuerliche Terminologie, die so stumpf ist als geschmacklos (vergl. „lebende und todte Jahre"), mit einem Wort, welcher gänzliche Mangel an Methode!

Z. B. Zillmer, der nach meiner Ansicht noch das beste geleistet, sagt a. a. O.: Seite 71: „In einer stationären Bevölkerung, in welcher die An- „zahl der in jedem Jahre gebornen Kinder ebenso gross ist, wie die Anzahl der „im Laufe eines Jahres in den verschiedenen Altersstufen eintretenden Todes- „fälle, und in welcher die Sterblichkeit für jede einzelne Altersstufe Jahr aus „Jahr ein einen constansten Werth hat, stimmt die mittlere Lebensdauer genau „überein mit dem durchschnittlichen Sterbealter der in einem Jahre sterbenden „Personen; ferner mit der Geburtsziffer und mit der Sterblichkeitsziffer; das „Durchschnittsalter sämmtlicher zu gleicher Zeit lebender Personen ist aber von „diesen vier Zahlen verschieden." Hieran fügt er einen mathematischen Beweis, worin angenommen wird, dass die jährliche Geburtenmenge auf den Anfang des Jahres vereinigt ist; und dass die Todesfälle gleichmässig über das Jahr vertheilt sind. Der richtige Kern des Satzes ist hier in ungenaue Bedingungen gehüllt und der Beweis durch überflüssige und willkürliche Annahmen geschwächt. Richtig lauten die Bedingungen so: bei constanter Geburtendichtigkeit und bei einer herrschenden Absterbeordnung (sind erstens die jährlichen Geburtenmengen constant, zweitens die Menge der jährlich verstorbenen ihnen gleich, drittens die Bevölkerung „stationär," das heisst die Volkszahl unabhängig von der Zeit und endlich) ist das durchschnittliche Alter der Verstorbenen gleich der mittlern Lebensdauer, auch bei stätiger Geburtenfolge. Ein andrer Satz Seite 74 lautet: „Denkt man sich eine Bevölkerung aus dem stationären „Zustand übergehend in einen veränderlichen dadurch, dass die Anzahl der „Geburten mit jedem Jahr grösser wird, während die Sterblichkeitsverhältnisse „der einzelnen Lebensperioden genau dieselben bleiben, wie im stationärem „Zustand, so verändern sich im allgemeinen die Geburtsziffer und die Sterbe-

„ziffer, das durchschnittliche Sterbealter und das durchschnittliche Alter der „Lebenden; und nur die mittlere Lebensdauer bleibt constant.“ Folgt ein Beweis durch die Annahme, dass die Geburtenmenge der verschiedenen Jahre — eine geometrische Reihe bilde; in einem andern Falle, dass sie eine arithmetische Reihe bilde; als müsste man ewig an die kindlichen stationären Zustände und geometrischen Reihen gebannt sein. Der Satz ist ein Zerrbild des folgenden: wenn eine Absterbeordnung herrschend ist, und über die Geburtenfolge nichts ausgesagt wird (dann ist die Bevölkerung nicht „stationär,“ das heisst die Volkszahl nicht unabhängig von der Zeit; auch die jährlichen Geburtenmengen brauchen nicht einander gleich zu sein und) dann sind Geburtsziffer, Sterblichkeitsziffer, durchschnittliches Alter etc., abhängig von der Zeit, nur die mittlere Lebensdauer bleibt dieselbe. Beweis: die Grösse, woraus die zuerst genannten Quotienten gebildet werden, sind Functionen der Geburtenfolge, die eine Function der Zeit ist; während nach der Annahme die Absterbeordnung ein für alle mal herrscht, unabhängig von der Zeit, sodass die mittlere Lebensdauer, ein Begriff der nur aus ihr abgeleitet wird, natürlich auch unabhängig von der Zeit ist. —

Viel flüchtiger noch und viel ungenauer werden das durchschnittliche Alter und die Sterblichkeitsziffer von den übrigen Schriftstellern abgefertigt; sodass es nicht ganz überflüssig war, auch hier die Kritik von neuem aufzunehmen. —

Ueber die Anhaltische Methode, da sie neu ist, gibt er keine Literatur; sie bildet wohl den wichtigsten Gegenstand des zweiten Abschnittes, und wir möchten, im Interesse der Sache, die Kritik besonders darauf hinweisen. Ebenfalls neu, aber nicht so wichtig, ist die Auslegung der Sterblichkeits- und Geburtsziffer, wofür daher gleichfalls keine Literatur angeführt werden kann. —

Die vorliegende Arbeit, wenn man sie noch einmal im Ganzen überblickt, entstand aus dem Bedürfniss, die allgemeinen Eigenschaften der Gesammtheiten von Lebenden und Verstorbenen, besonders ihre Beziehungen zur Absterbeordnung kennen zu lernen. Es fand sich, dass dieses Ziel durch eine analytische Darstellung der Gesammtheiten erreichbar sei, als deren Hilfsmittel die Geburtenfolge, aufgefasst als Function der Zeit, und die Absterbeordnung, aufgefasst als Function des Alters, sich darboten. So wurden die Gesammtheiten der Lebenden zuerst, dann die der Verstorbenen, dann die Beziehungen zwischen beiden ermittelt; das summirte Alter dieser sowohl als jener Gesammtheiten und die Beziehungen zwischen dem summirten Alter der Lebenden und Verstorbenen schloss sich daran an; und endlich wurde die Darstellung der sogen. Nebengesammtheiten, besonders der Verstorbenen, nachgeholt. Ihr summirtes Alter, als etwas weniger wichtiges, wurde übergangen, hingegen die besondern Fälle der Nebengesammtheiten hervorgehoben, weil sich zeigen liess, dass alle Gesammtheiten der Verstorbenen sich zerlegen lassen in die Summe einer Hauptgesammtheit und besonderer Nebengesammtheiten. Das war in Kürze der Inhalt des ersten Abschnittes. Im zweiten Abschnitt diente dieselbe analytische Darstellung zur Kritik der hauptsächlichsten indirecten Methoden die

Absterbeordnung zu finden, und eine neue Methode vorzuschlagen. Eine Kritik der gewöhnlich berechneten Quotienten machte den Schluss.

Während so die wichtigsten begrifflichen Eigenschaften der Gesammtheiten gefunden sind, scheint mir für die Ermittlung der Sterblichkeit nach dem Alter hauptsächlilch folgendes gewonnen: für die directe Ermittlung die allgemeine Ableitung des bisher nur an Beispielen erläuterten Formulars, wonach die Sterberegister auszuziehen sind; für die indirecte Ermittlung: die Anhaltische Methode, welche allein auf die Geburtendichtigkeit Rücksicht nimmt; und für beide Ermittlungen: die schärfere Fragestellung, nämlich nach derjenigen Absterbeordnung, die, wenn sie geherrscht hätte, die beobachtete Grösse der Gesammtheiten erklären würde. Diese Fragestellung allein sichert eine richtige Auslegung der Werthe, auf welche man durch Anwendung der directen oder indirecten Methode geführt wird. –

Hoffentlich gelingt es nach und nach bei statistischen Untersuchungen ein rationelles Verfahren, wie wir versucht haben, in Anwendung zu bringen. Bis jetzt herrscht fast überall die vollständigste Empirie und verschuldet den grössten Theil der Mängel, die man dieser Disciplin mit Recht vorwirft. Sie ist in jungen Forschungsgebieten unvermeidlich, aber sie muss und kann überwunden werden.

Leider findet man die Meinung vertreten, als sei der Statistiker zum blosen Herumtasten im Dunkeln, zum Probiren aufs Gerathewohl und auf nichts weiter angewiesen. Man findet die Ansicht in einem neuern Buch von A. Wagner, die Gesetzmässigkeit in den menschlichen Handlungen, Hamburg 1864, so ausgesprochen (wir bemerken nur noch, dass ein einzelner Satz, herausgerissen aus dem Zusammenhang, wenn er als einseitig erkannt wird, noch nicht gerade gegen das ganze Buch spricht aus dem er entnommen ist). Dort heisst es Seite 9: „die Methode“ (die menschlichen Handlungen zu untersuchen) „wird vorzugs- „weise in der Art gehandhabt, dass man die beobachteten Facta auf Zahlen- „werthe zurückführt, die absoluten Zahlen in relative verwandelt, und mit stati- „stischen Gruppirungen und Tabellen, mit Durchschnitten, Procentsätzen und „Proportionen operirt resp. rechnet.“ Seite 69 heisst es weiter vom Operiren des Statistikers, dass zur Auffindung von „Regelmässigkeiten“ mit ein angeborner Zahlensinn gehöre; ein ungeschulter Verstand leiste darin schon manches. Der geschulte Verstand habe dann zu prüfen, ob den Regelmässigkeiten „statistischer“ Werth zukomme und ob sich Causalverhältnisse erkennen lassen. Kann es eine treffendere Schilderung dessen geben, was man roheste Empirie nennen darf, als die erste der beiden Stellen? Man führt beobachtete Facta auf Zahlenwerthe zurück; das heisst wohl, man misst die Grösse dieser oder jener messbar bestimmten Gesammtheit. Hierauf verwandelt man die absoluten Zahlen in relative; einfacher ausgedrückt: man dividirt; was und wie ist weniger wichtig. Dann gruppirt man, und zwar wie, damit es eine statistische Arbeit werde? Antwort: statistisch; eine Antwort, die das Echo der Frage ist. Was noch fehlt, wird mit Durchschnitten, Proportionen und Procentsätzen aus-

gefüllt. Das ist die Methode des statistischen Arbeitens. Wenn man dem Besucher eines chemischen Laboratoriums sagen wollte: Sehen Sie, in diesen Gläsern stehen verschiedene Reagentien; der Chemiker giesst bald aus diesem bald aus jenem einen Tropfen heraus, mischt, schüttelt sieht sich die Farbe der Niederschläge an, gruppirt sie chemisch, trocknet sie, wägt sie ab und verwandelt die gefundenen absoluten Zahlen in relative: so hat man darin eine ebenso treffende Schilderung der Methode des Chemikers gegeben.

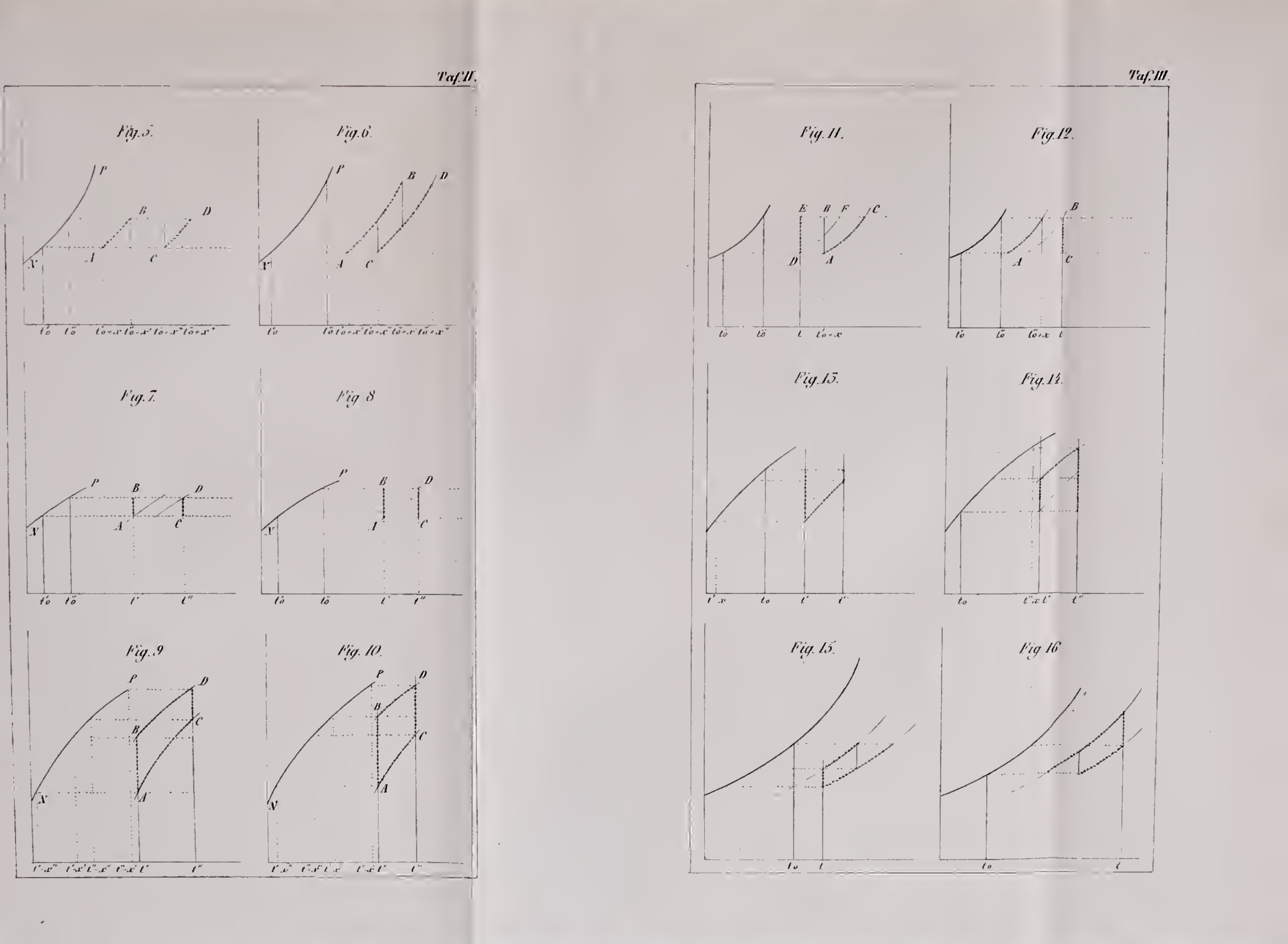
Freilich ist man auf chemische Erscheinungen ursprünglich durch solche zufällige Mischungen aufmerksam geworden; so hat auch die rein äusserliche Bemerkung der Regelmässigkeit vieler Vorgänge innerhalb der Bevölkerung den Anlass abgegeben, hierher die wissenschaftliche Aufmerksamkeit zu richten.

Aber die äusserliche Bemerkung von Regelmässigkeiten genügt auch der Statistik so wenig, dass eigentlich erst von da an ihre Arbeit beginnt. Hat man auf dem Weg des oberflächlichen Vergleiches bemerkt, dass z. B. die Anzahl der Verstorbenen jährlich nicht allzugrosse Veränderungen erleidet, so geht man einen Schritt weiter und erklärt sich diese Erscheinung durch den Gedanken, dass vielleicht eine herrschende Absterbeordnung angenommen werden kann. Um den Gedanken zu prüfen, bedarf es einer theoretischen Darstellung, die zeigt, wie die verschiedenen Gesammtheiten von Lebenden und Verstorbenen aus der Geburtenfolge hervorgehen, wenn eine Absterbeordnung herrscht. Die Darstellung zeigt zugleich die Wege, um die Absterbeordnung zu finden, woraus die Gesammtheiten entstanden gedacht sind, sie zeigt die Methoden zur Ermittlung der Sterblichkeit. Endlich werden die Methoden auf möglichst viele Beobachtungen angewendet: vielleicht findet sich dann, dass die Absterbeordnungen, auf die man geführt wird, nur unbedeutend von einander abweichen. Erst durch diesen letzten Schritt hat man die anfänglich wahrgenommene „Regelmässigkeit“ so rein als möglich dargestellt durch Anwendung eines rationellen Verfahrens, und die Untersuchung des Statistikers gewinnt einen wissenschaftlichen Abschluss.

Es war nicht unsre Aufgabe, auch den letzten Schritt zu thun und die Methoden auf möglichst vieles Material anzuwenden. Für uns bleibt daher die Frage, ob das Absterben nach dem Alter so regelmässig dasselbe sei, ganz unentschieden. Nur das Mittelglied zwischen Stellung und Lösung der Frage, nur die Theorie und auf Grund derselben ein rationelles Verfahren sollte versucht werden. Es sollte gezeigt werden, dass die Bevölkerungsstatistik, soweit sie Fragen der Sterblichkeit behandelt, nicht verurtheilt ist, bei der rohsten Empirie stehen zu bleiben.

Leipzig, im Sommer 1867.

Druck von Ackermann u. Glaser in Leipzig.



Taf. II.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8
Fig. 9
Fig. 10.
Taf. III.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16



